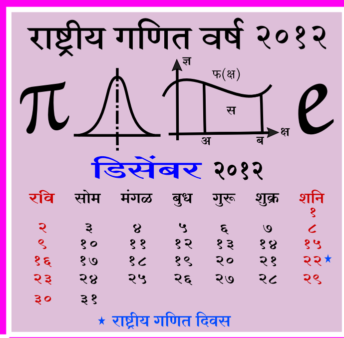
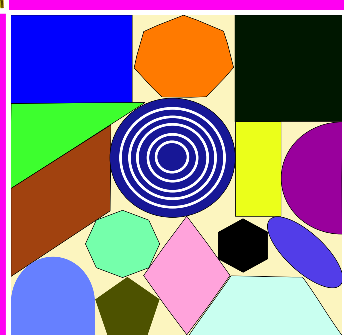
बहुरंगी गणित

डॉ. विवेक पाटकर







बहुरंगी गणित
डॉ. विवेक पाटकर

बहुरंगी गणित

डॉ. विवेक पाटकर

मुंबई
फेब्रुवारी २०१३

बहुरंगी गणित
Bahurangi Ganit

डी–१, अनिता को–ऑप. सोसायटी,
प्लॉट ६१२, सेक्टर ६, चारकोप,
कांदिवली (पश्चिम), मुंबई ४०० ०६७.
इ–मेल : vnpatkar2004@yahoo.co.in

पहिली आवृत्ती : फेब्रुवारी २०१३

मुद्रक
दि पॅकेज
१९६ आय, कात्रक कम्पाउण्ड, गायवाडी,
गिरगाव, मुंबई–४०० ००४.
दूरध्वनी : २३८८८५६२

मुखपृष्ठ/मांडणी
सुबोध आर्टस्
१९६ आय, कात्रक कम्पाउण्ड, गायवाडी,
गिरगाव, मुंबई–४०० ००४.
दूरध्वनी : २३८८८५०९

[{(+−×÷)}]

गणितविज्ञानाचे अध्ययन, अध्यापन
आणि संशोधन करणारे तसेच इतर सर्व
गणितरसिकांना सस्नेह अर्पण

[{(+−×÷)}]

दिव्य मराठी या दैनिक वृत्तपत्राने माझे प्रसिद्ध केलेले लेख या पुस्तकात वापरण्यासाठी परवानगी दिल्याबद्दल मी अत्यंत आभारी आहे.

मराठी विज्ञान परिषद-पत्रिका या मासिकाने माझे प्रसिद्ध केले लेख या पुस्तकात समाविष्ट करण्यास परवानगी दिल्याबद्दल मी मनःपूर्वक आभार मानतो.

या पुस्तकात समाविष्ट केलेले पूर्वप्रसिद्ध लेख :-

दिव्य मराठी :

०) रामानुजन : एक अलौकिक चमत्कार, २८/०३/१२
१) आधार गणिताचा, ०४/०४/१२
२) मनोरंजन आणि चित्रकलेचे गणित, ११/०४/१२
३) बहुरंगी अंक आणि संख्या, १८/०४/१२
४) मितीचे अजब विश्व, २५/०४/१२
५) कप्प्यात दडलेले गणित, ०९/०५/१२
६) आलेखातून उमललेले गणित, १६/०५/१२
७) गाठीत बांधलेले गणित, २३/०५/१२
८) मोठेपणाचे गणित, ०६/०६/१२
९) भाषा-गणित घनिष्टता, १३/०६/१२
१०) गणित आणि तऱ्हेवाईकपणा, २७/०६/१२
११) गणिती नावे आणि टोपणनावे, ०४/०७/१२
१२) संभाव्य घटनांचा गणिती वेध, ११/०७/१२
१३) वाटचाल विमा गणिताची, १८/०७/१२
१४) टपाल तिकिटे आणि गणित, २५/०७/१२
१५) आधुनिक भारतीय गणिती योगदान, ०१/०८/१२
१६) युद्ध आणि गणित, ०८/०८/१२
१७) गणिती अटकळ, २२/०८/१२
१८) आत-बाहेरचे गणित, २९/०८/१२,
१९) गणितातील लवचिकता, ०५/०९/१२
२०) गणितातील दक्षता, १२/०९/१२
२१) कार्यक्रम सादरीकरणाचे गणित, १९/०९/१२
२२) पिकचे प्रमेय : एक प्रबळ साधन, २६/०९/१२
२३) त्रिभुजाची बहु-उपयोगिता, ०३/१०/१२
२४) लहान-मोठे गणित, १०/१०/१२
२५) गणितातील वादळे, १७/१०/१२
२६) गणिती विचारमंथन, २४/१०/१२
२७) गणिती प्रतिकृती, ३१/१०/१२
२८) गतिमान प्रायोजन, ०८/११/१२
२९) गणित प्रतिसादाचे, १४/११/१२
३०) नित्य विचारक्षेत्राचे गणित, २१/११/१२
३१) गणित मानव-यंत्र विश्वासाहर्ततेचे, २८/११/१२
३२) माहिती हाताळण्याचे गणित, ०५/१२/१२
३३) प्राथमिकता ठरवण्याचे गणित, १२/१२/१२
३४) गणितातील विरोधाभास, १९/१२/१२
३५) गणिताची अखंड वाटचाल, २६/१२/१२

मराठी विज्ञान परिषद-पत्रिका :-

१) आयएसबीएन : प्रत्येक पुस्तकाचा विशिष्ट ओळख क्रमांक, मार्च २०१२
२) निर्देशांकाचे निर्देशन, एप्रिल २०१२
३) महती विखरलेल्या बिंदूंची, मे २०१२
४) गणित गुन्हे तपासणीचे, जून २०१२
५) मॅट्रिक्स म्हणजे सारणीत सामावलेले सक्षम गणित, जुलै २०१२
६) सरळ रेषेचे गणिती सामर्थ्य, ऑगस्ट २०१२
७) गणित लघु-जगताचे, सप्टेंबर २०१२
८) गणिती संशोधन : दिशा आणि आव्हाने, ऑक्टोबर २०१२

प्रास्ताविक

गणितात महत्त्वपूर्ण व मूलभूत संकल्पना मांडणे तसेच काही गणिती प्रश्नांसाठी नवीन पद्धती विकसित करणे अशा उल्लेखनीय योगदानाची भारतीय परंपरा प्राचीन काळापासून चालत आलेली आहे. अल्प आयुष्य लाभलेल्या दक्षिण भारतीयवासी श्रीनिवास रामानुजन अयंगर (२२ डिसेंबर १८८७ ते २६ एप्रिल १९२०) या असामान्य गणितज्ञाने त्यात मोलाची भर घातली. त्यांच्या १२५व्या जन्मवर्षानिमित्त सन २०१२ हे भारतात राष्ट्रीय गणितवर्ष म्हणून साजरे करण्याचे योजिले गेले. गणित या विषयाबाबत सर्व स्तरांवर गोडी उत्पन्न करणे, संशोधनास प्रोत्साहन देणे आणि व्यापक प्रमाणात त्याचे उपयोजन करण्यावर भर देणे अशा उद्देशाने विविध कार्यक्रम त्या वर्षात देशभर घेण्यात आले.

या पार्श्वभूमिवर दिव्य मराठी या दैनिक वृत्तपत्राने मला एक साप्ताहिक सदर चालवण्याबद्दल विचारले. गणिताबद्दलची ही त्याची आस्था विशेष सुखावह वाटली. एका अर्थाने सर्वसामान्यांना गणिताच्या जमेल तितक्या अंगांची आणि उपयोगितेची महती मराठीतून सांगण्याची ही सुवर्णसंधीच मला मिळाली. त्यानुसार एप्रिल ते डिसेंबर २०१२ या नऊ महिन्यांत 'गणित जगत' हे माझे सदर 'दिव्य एज्युकेशन' या दिव्य मराठीच्या पुरवणीत दर बुधवारी प्रसिद्ध झाले. त्यात एकूण ३५ लेखांचा समावेश केला गेला.

विज्ञानाचा प्रसार मराठीतून करण्याचे कार्य हाती घेतलेल्या मराठी विज्ञान परिषदेने देखील या गणितवर्षानिमित्त काही विशेष कार्यशाळा व परिसंवाद आयोजित केले, तसेच तिच्या मासिक पत्रिकेसाठी गणिताशी निगडीत लेख व अन्य साहित्य पाठवण्याचे आवाहन केले. मला या सर्व उपक्रमात भाग घेण्याची संधी मिळाली आणि मार्च ते ऑक्टोबर २०१२ या काळात माझे सलग आठ लेख सदर पत्रिकेत प्रकाशित झाले (www.mavipamumbai.org).

गणिताच्या विविध बाजू, कमी ज्ञात असलेले पैलू, उपयोजनाचा आवाका आणि संशोधन व कारकीर्द घडवण्याचे मार्ग अशा बाबी जमेल

तितक्या सोप्या भाषेत मांडण्याचा प्रयत्न वरील सर्व लेखांत केला गेला. ‘‘आम्हाला हे माहित नव्हते’’, ‘‘गणिताचा असा उपयोग होऊ शकतो हे आमच्यासाठी नवीन आहे’’ या प्रकारच्या उत्साहवर्धक प्रतिक्रिया विविध वाचकांकडून सतत मिळत गेल्याने हुरूप टिकून राहिला. मुख्य म्हणजे गणिताचा आणखीन सखोलपणे अभ्यास करण्यास मी उद्युक्त झालो.

हे सर्व लेख पुस्तकरूपात संकलित केल्यास भविष्यातील वाचकांना उपयोग होईल अशी सुचना वारंवार मिळत होती. तिचे महत्व लक्षात घेऊन गणिताचे बहुरंग चित्रीत करणारे हे पुस्तक वाचकांच्या हाती देण्यात एक वेगळाच आनंद होत आहे. स्वाभाविकच लेखांवर काही संपादकीय संस्कार करणे, पूरक माहितीची भर घालणे व आवश्यक असे बदल करणे भाग पडले आहे. लेखांचा क्रम वाचनाची लय लक्षात घेऊन बदललेला आहे. वाचकांच्या सोयीसाठी निवडक लेखांशी संबंधित टीपा तसेच संदर्भ यांची सूची देण्यात आली आहे.

‘गणिताची अपूर्वाई’ हे गणिताचे विविध पदर दाखवणारे पुस्तक २००८ साली प्रसिद्ध केल्यावर आणखी काही वेगळे आणि नावीन्यपूर्ण गणिती घटक सादर करणाऱ्या या पुस्तकाची निर्मिती माझ्यासाठी निश्चितच समाधान देणारी आहे. त्याचबरोबर गणिताचा अभ्यास, संशोधन, वापर आणि लेखन यासाठी एक आयुष्य पुरेसे नाही याची जाणीव परत झाली. तरी गणिताच्या अधिकाधिक वाटा चोखाळण्याचे व त्यांच्या अनेकविध रंगांचा मनमुराद आस्वाद घेण्याची संधी सर्वांना लाभो.

मुंबई, १३ फेब्रुवारी २०१३ डॉ. विवेक पाटकर

आभार

'दिव्य मराठी' या वृत्तपत्राचे समूह संपादक श्री. कुमार केतकर आणि मुख्य उप-संपादक श्री. सुजय शास्त्री यांनी माझे लेख अधिक रंगतदार करण्यास मोलाची मदत केली त्याबद्दल मी त्यांचा आभारी आहे.

मराठी विज्ञान परिषदेचे कार्यवाह श्री. अ. पां. देशपांडे व डॉ. राजीव चिटणीस यांनी गणिताचे लेखन आणि प्रबोधन करण्यास मला महत्त्वपूर्ण व्यासपीठ उपलब्ध करून दिले त्यासाठी मी त्यांचे आभार मानतो. तसेच मराठी विज्ञान परिषद-पत्रिकेचे संपादक मंडळ आणि सर्व कर्मचारीवर्गाच्या सहकार्याबद्दल आभार व्यक्त करतो.

एन. जी. आचार्य व डी. के. मराठे कला, विज्ञान आणि वाणिज्य महाविद्यालय, चेंबूर, मुंबई येथे कार्यरत असलेल्या प्रा. माणिक टेंबे आणि प्रा. अश्विनी रानडे यांनी राष्ट्रीय गणितवर्ष २०१२ मध्ये गणिताच्या विविध कार्यशाळा व परिसंवाद आयोजित करण्यास दिलेली साथ व प्रोत्साहन या लेखनास उपयोगी ठरले आहे, तरी त्यांचे मनःपूर्वक आभार.

माझ्या लेखांवर नियमितपणे तसेच चिकित्सकपणे प्रतिक्रिया पाठवणारे वाचक मोठ्या संख्येने असल्यामुळे त्या सर्वांची नावे नमूद करणे शक्य नाही, तरी मी त्यांचा ऋणी आहे.

माझ्या लेखनासाठी मुंबई विद्यापीठाची विद्यानगरी व फोर्ट येथील ग्रंथालये तसेच एशियाटीक सोसायटीच्या मुंबईतील ग्रंथालयाची मदत सतत मिळाली आहे, मी त्यांच्या समस्त कर्मचारीवृंदाचा आभारी आहे. या लेखनासाठी आधार म्हणून वापरलेल्या सर्व प्रकारच्या स्त्रोतांचे मी आभार मानतो.

नोएटिक टेक्नॉलॉजिचे प्रमुख श्री. योगेश पालकर आणि त्यांचे सहकारी यांनी हे पुस्तक प्रसिद्ध करण्यास दिलेल्या सहकार्यासाठी मी त्यांचे विशेष आभार मानतो.

– डॉ. विवेक पाटकर

लेखकाबद्दल –

डॉ. विवेक पाटकर हे दिल्ली विद्यापीठाचे गणितातील बी.एस्सी. (ऑनर्स) आणि ऑपरेशनल रिसर्च या विषयातील एम. एस्सी. व पीएच. डी. आहेत. ते आता एक स्वतंत्र संशोधक म्हणून कार्यरत आहेत. त्यापूर्वी मुंबई महानगर प्रदेश विकास प्राधिकरण या संस्थेत प्रवर्तन संशोधन विशेषज्ञ व नंतर आयसीएफएआय बिझनेस स्कूल, मुंबई येथे गणितशास्त्राचे प्राध्यापक म्हणून त्यांनी काम केले आहे. मुंबई विद्यापीठाच्या ग्रंथालय व माहितीशास्त्र विभागाशी ते मागील पंचवीस वर्षे संलग्न आहेत.

डॉ. पाटकर यांना गणित व इतर अनेक विषयांतील संशोधनाचा प्रदीर्घ अनुभव आहे. आय. आय. टी. व आय. आय. एम. या भारतातील अग्रगण्य संस्था त्यांना अनेकदा तज्ञ परीक्षक म्हणून आमंत्रित करतात. सदर पुस्तक मिळून त्यांच्या नावे दहा पुस्तके आहेत (लेखक, सहलेखक, संपादक किंवा सहसंपादक). त्यांचे ३०० हून अधिक शोधनिबंध, लेख, स्तंभलेख आंतरराष्ट्रीय व राष्ट्रीय नियतकालिकांत प्रसिद्ध झाले आहेत. गणितविज्ञान, संगणक, नगरविकास, परिवहन, ग्रंथालय, तंत्रज्ञान आणि व्यवस्थापन या क्षेत्रांत त्यांचे संशोधन व लेखन आहे.

विज्ञान आणि सामाजिक विज्ञान यांत संशोधन मार्गदर्शनासाठी त्यांनी मागील पाच वर्षात ठिकठिकाणी कार्यशाळा घेतल्या आहेत. मुंबई विद्यापीठाचे अनेक विभाग तसेच देशातील विविध शैक्षणिक व संशोधन संस्था त्यांना व्याख्यानासाठी वेळोवेळी पाचारण करतात. जीत असोसिएशन फॉर सपोर्ट टू कॅन्सर पेशण्टस (जासकॅप) या सेवाभावी संस्थेसाठी त्यांनी गेल्या दोन वर्षात कर्करोगासंबंधी २५हून अधिक इंग्रजी माहिती पुस्तिका, तथ्यपत्रे व अन्य साहित्याचा मराठी आणि हिंदी अनुवाद केला आहे (www.jascap.org).

'ह्युमन सिस्टिम्स मॅनेजमेण्ट' तसेच 'जर्नल ऑफ जीओमॅटिक्स' या आंतरराष्ट्रीय जर्नल्सच्या संपादक मंडळाचे ते सभासद आहेत.

अनुक्रमणिका

१

रामानुजन : एक अलौकिक गणिती चमत्कार

गणिती प्रज्ञावंताना सहसा त्यांच्या योगदानानुसार उत्तम आणि अत्युतम अशा दोन वर्गात विभागले जाते. पण काही गणितज्ञ अपवादात्मक असामान्य अशा तिसऱ्या वर्गात मोडतात. अशा मोजक्या प्रतिभावंतात भारताचे श्रीनिवास रामानुजन (२२ डिसेंबर १८८७ ते २६ एप्रिल १९२०) यांचा समावेश असणे आपल्यासाठी गौरवास्पद आहे.

वयाच्या दहाव्या वर्षी गणिताची ओळख झालेल्या मद्रास प्रांतातील रामानुजन यांची गणिती प्रतिभा शाळेपासूनच थक्क करणारी होती. पण दुसऱ्या विषयांकडे दुर्लक्ष झाल्यामुळे ते महाविद्यालयातील स्नातक पदवी मिळवू शकले नाहीत. पोटा–पाण्यासाठी मद्रास पोर्ट ट्रस्ट मध्ये कारकुनाची नोकरी पत्करली व वेळ मिळेल तेव्हा त्यांनी गणितात संशोधन चालूच ठेवले. त्यांनी इंग्लंडमधील केम्ब्रिज विद्यापीठातील सुप्रसिद्ध गणिती प्राध्यापक जी. एच. हार्डी यांना एका नऊ पानी पत्रात आपले काही गणिती शोध कळवले. ते वाचून प्राध्यापक हार्डी अचंबित झाले व त्यांनी रामानुजनला १९१४ मध्ये इंग्लंडला बोलवून घेतले. तेथे त्यांच्या प्रतिभेला आणखीन पंख फुटले व त्यांनी मूलभूत असे काम करून अनेक सिद्धांत मांडले. मात्र इंग्लंडमधील हवामान आणि रामानुजन यांची सनातन कर्मठ जीवनशैली यांचा मेळ जमेना. प्रकृति ढासळल्याने अनेकदा त्यांना रुग्णालयात राहावे लागे व शेवटी १९१९ मध्ये ते मायदेशी परतले.

दैवी देणगी

केवळ ३२ वर्षांचे आयुष्य लाभलेल्या अतिशय नम्र आणि निगर्वी वृत्तीच्या रामानुजन यांचे काम प्रामुख्याने अंकशास्त्र, थिटा फंक्शन आणि

अनंत मालिका या क्षेत्रांत आहे. त्यांनी मांडलेल्या जवळपास ४००० सूत्रांपैकी दोन तृतीयांश अगदी नवीन आहेत व काही तुरळक वगळता सगळी बरोबर आहेत. अगदी साध्या सूत्रापासून ते अतिशय जटील अशी ती आहेत. त्यांचे काही नमुने सोबतच्या चौकटीत दिले आहेत. रामानुजन सांगत की त्यांच्या स्वप्नात त्यांची नामाक्कलची नामगिरी ही आराध्य देवता आणि नरसिंह देव प्रकट होऊन रक्ताचे थेंब सोडतात ज्यात असंख्य अतिशय प्रगत गणिती सूत्रे त्यांना दिसत आणि जागे झाल्यावर त्यातील आठवतील तितकी ते लिहून काढत, व ती सिद्ध करण्यासाठी अपार कष्ट घेत. त्यांच्या मते, गणिती सूत्र म्हणजे देवाच्या मनातील विचार, असा होता. कदाचित अशा निष्पाप, अतिशय संवेदनशील ग्रहणशीलता व तरल चित्तवृत्ती मुळेच त्यांना ती सूत्रे दिसत, रोखठोक तर्कशास्त्र आणि निर्विकार गणिती चौकटीत शिक्षण झालेल्यांना ती सहसा दिसणार नाहीत, असा एक मतप्रवाह आहे. रामानुजन हा निसर्गाचा एक गणिती चमत्कार होता असे मानणे रास्त ठरेल.

अ) $२^{न} - ७ = क्ष^{२}$, हे न = ३, ४, ५, ७, १५ या पूर्णांकासाठी फक्त बरोबर आहे. रामानुजनच्या या उत्तराशिवाय दुसरे कुठले ही पूर्णांकांचे उत्तर शक्य नाही असे आता सिद्ध झाले आहे.

ब) १७२९ हा पहिला पूर्णांक आहे ज्याला दोन पूर्णांकांच्या घनांची बेरीज असे दोन प्रकारे मांडता येते, $१७२९ = १^{३} + १२^{३} = ९^{३} + १०^{३}$. या अंकाला ‘रामानुजन’ अंक किंवा ‘टॅक्सी-कॅब’ अंक असे म्हणतात. असे अंक अनंत आहेत.

क) $$-२ = \sqrt[३]{-६ + \sqrt[३]{-६ + \sqrt[३]{-६ + \sqrt[३]{-६ + \ldots}}}}$$

ड) $$\frac{१}{\pi} = \sqrt{८} \sum_{न=०}^{\infty} \frac{(११०३ + २६३९० न)\,(२न-१)!!\,(४न-१)!!}{९९^{४न+२}\quad ३२^{न}\,(न!)^{३}}$$

थक्क करणारे कार्य

रामानुजन यांनी अल्पकाळात केलेले योगदान आज देखील संशोधकांना आव्हान असून आणखी काही शतके काम करता येईल एवढी त्यांची सूत्रे

सखोल आहेत. १९९७ पासून *दी रामानुजन जर्नल* नावाचे एक आंतरराष्ट्रीय नियतकालिक प्रसिद्ध होत असून त्यात त्यांच्या कार्याशी निगडीत असे दर्जेदार शोधलेख प्रसिद्ध होतात. २००५ पासून विकसनशील देशातील ४५ वर्षांहून कमी वय असलेल्या गणितज्ञास त्याच्या उल्लेखनीय संशोधनासाठी **श्रीनिवास रामानुजन पारितोषिक** देण्यात येते.

आदर्श

आपण गणितातील मूलभूत तसेच उपयोजन संशोधन यासाठी रामानुजन यांचा आदर्श सतत डोळ्यासमोर ठेवला पाहिजे. त्यांनी आर्थिक, शैक्षणिक आणि शारीरिक प्रतिकूल परिस्थितीतही गणितासाठी आपले संपूर्ण आयुष्य झोकून दिले आणि भारताची गणितातील गौरवशाली परंपरा वाढवली. गणित वर्ष २०१२ साजरे करण्याचे उद्देश त्यांच्या कार्याची आठवण करत नवीन संशोधकांची पिढी तयार करणे, गणिताकडे विद्यार्थ्यांना आकर्षित करणे तसेच जनसामान्यापर्यंत गणिताची महती पोहचवणे असे होते. त्या दृष्टीने गणिताबाबत विविध स्तरांवर कार्यशाळा, परिषदा, चर्चासत्रे, स्पर्धा व प्रकाशने आणि गणितातील कारकीर्द घडवण्याच्या संधीबद्दल विद्यार्थ्यांना माहिती देणे असे कार्यक्रम हाती घेण्यात आले.

आंतरराष्ट्रीय स्तरावर २०१२ हे *ट्युरिंग वर्ष* म्हणून साजरे केले गेले. ॲलन ट्युरिंग (१९१२-१९५४) हे इंग्लंड मधील मूळचे गणितज्ञ, पण संगणक क्षेत्रात त्यांनी केलेले पायाभूत काम आज ही मार्गदर्शक ठरत आहे. त्यांच्या जन्मशताब्दीनिमित्त अनेक कार्यक्रम जगभर राबवले गेले.

गणितातील संकल्पना व पद्धती उपलब्ध असल्यामुळेच अनेक क्षेत्रात प्रगती होते, म्हणून गणितात सातत्याने संशोधन करून ज्ञानात भर घालणे अत्यंत आवश्यक आहे. तरी आपण सर्व २०१२ ह्या राष्ट्रीय गणित वर्षाच्यानिमित्ताने गणिताचे अध्ययन, अध्यापन, संशोधन आणि प्रबोधन यांची नवी दालने उघडण्याचा प्रयत्न करू या.

पूरक माहिती :

- रामानुजनयांचे गणिती कार्य अतिशय गहन व काळाच्या पुढे असे होते. उदाहरणार्थ, मृत्यूशय्येवर असताना त्यांनी 'मॉक' थिटा फंक्शन अशी एक संकल्पना मांडली आणि त्याची सूत्रे विकसित केली.

त्यांचे ते निष्कर्ष अचूक असल्याची सिद्धता मात्र गणितज्ञांना अलीकडेच म्हणजे डिसेंबर २०१२ मध्ये देता आली. या संकल्पनेचा वापर प्रगत गणित व भौतिक विज्ञानाच्या अनेक शाखांत (उदा. स्ट्रिंग सिद्धांत (थेयरी)) केला जातो हे महत्त्वाचे आहे.

- रामानुजन आणि त्यांच्या कार्याबाबत विविध प्रकारचे साहित्य उपलब्ध आहे. त्यांचे चरित्र, जीवनशैली व संबंधित निवडक व्यक्ती याबाबत बरीच माहिती खालील पुस्तकांत उपलब्ध आहे :

  - Kanigel, R., *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*, New York : Charles Scribner's Sons, 1991.
  - Leavitt, D., *The Indian Clerk*, New York : Bloomsbury, 2007.

⌘⌘⌘

२

बहुढंगी अंक आणि संख्या

"माझ्या नशीबाचे फासेच उलटे पडले आहेत, तर मला यश कसे मिळणार !" अशा धर्तीचे उद्गार ऐकले की महाभारतातील द्यूत खेळाची आठवण चटकन होते. फासे, म्हणजे त्यावरील अंक क्षणार्धात राजाला रंक करू शकतात अशी प्रकर्षाने जाणीव होते. यात अंकांचा काय दोष हा प्रश्न साहाजिकच मनात येतो. अंक, आकृत्या व आलेख अशी गणिती साधने माणसाने मोजणी, तुलना आणि दैनंदिन व्यवहार सुरळितपणे पार पाडण्यासाठी निर्माण केलेली आहेत, म्हणजेच साधनांना का बोल लावायचे ?

गणिती वस्तुंचे अस्तित्व

तथापि एक मत प्रवाह सांगतो की गणिती अंक आणि आकृत्या ह्यांना त्यांचे स्वतंत्र असे अस्तित्व आहे व ते सदोदित उपस्थित आहेत, आपण त्यांना तयार न करता फक्त शोधून काढले आहे, एवढेच. त्याला *प्लेटोवाद* असे म्हणतात. पायथागोरसने (इ.स.पूर्वी ५८०-५००) भौतिक जगातील सर्व गोष्टी व घडामोडी गणितातील पूर्णांक आणि परिमेय संख्यांनी समजणे शक्य आहे असे प्रतिपादित केले होते. त्यांनी या मताचा पुरस्कार करणारा एक पंथ स्थापन केला होता ज्याचे ब्रीदवाक्य, "सर्व काही अंकच आहे" असे होते. पायथागोरसने अनेक अंक आणि संख्याचा विशिष्ट अर्थ मांडला होता. त्यापैकी निवडक अंक व संख्या त्यांच्या व्याख्यासह सोबतच्या चौकटीत दिल्या आहेत. पायथागोरस व त्याच्या पंथाचे अनुयायी या अंकांची पूजा-अर्चा ध्यान रूपाने करत व त्यांना अतिशय आदर्शवत आणि पवित्र मानत. असे म्हणतात की हिप्पासस नावाच्या एका व्यक्तीने पुढे √२

हा अंक अपरिमेय (इरॅशनल) आहे असे दाखवल्यावर पायथागोरस पंथाचे पाईक फार चिडले व त्यांनी हिप्पाससला शिक्षा म्हणून समुद्रात बुडवून ठार केले. मात्र गणिती अंकांच्या उदात्त प्रतिमेला या शोधामुळे कायमचा तडा गेला. एका अर्थाने गणिताचा विकास होण्यास त्याने चालना मिळाली ही एक जमेची बाजू आहे.

पायथागोरसचे अंक महात्म्य

१ : अंकांचा कर्ता किंवा जनक, शहाणपणाचा अंक (ऐक्य, एकता)

२ : आद्य किंवा मूळ स्त्रि अंक (विविधता)

३ : आद्य किंवा मूळ पुरुष अंक (सुसंवाद = एकता + विविधता)

४ : न्याय किंवा शासनाचा अंक

५ : मिलनाचा अंक (२ + ३)

६ : नवनिर्मितीचा अंक (२ + ३ + १)

७ : बालपण संपण्याचा अंक

१० : आदर्श अंक (१ + २ + ३ + ४)

१४ : प्रौढपणा आरंभ अंक

२१ : पुरुषाच्या विवाह वयाचा अंक

७० : मानवी आयुष्यमानाचा अंक

आश्चर्यजनक संख्या

गणिताच्यादृष्टीने विचार केल्यास अंक आणि त्यांनी निर्माण केलेल्या संख्याना अवास्तव महत्त्व देणे ही माणसाची मानसिक दुर्बलता आहे जसे की, १३ या अंकाला काही समाजात आजही अशुभ मानले जाते. तथापि काही संख्या इतक्या बहुढंगी आहेत की त्यांच्याबाबत सहजपणे गूढ निर्माण होते. मानवी मन त्याबद्दल विविध तर्क-वितर्क लढवून काही अर्थ आणि आशय काढण्याचा प्रयत्न करते. नमुना म्हणून खालील संख्या बघुया.

अ) ८९ ही संख्या अचंबित करणारी आहे. उदाहरणार्थ,

$८९ = (८ \times ९) + (८ + ९)$

$८ \div ९ = ०.८८८... \simeq ०.८९$

$२^{८९} - १$ ही मूळ संख्या आहे.

तसेच, कुठलीही धन पूर्णांकातील संख्या घेतली व तिच्या प्रत्येक अंकाचा वर्ग करून त्यांची बेरीज करणे अशी प्रक्रिया परत परत केल्यास उत्तर ८९ किंवा १ असे येते. उदाहरण म्हणून १४९ ही संख्या घेऊ या. त्यावर सदर प्रक्रिया खाली बाणांवर दाखवली आहे :-

$$१४९ \xrightarrow{(१^२+४^२+९^२)} ९८ \xrightarrow{(९^२+८^२)} १४५ \xrightarrow{(१^२+४^२+५^२)} ४२$$
$$\xrightarrow{(४^२ + २^२)} २० \xrightarrow{(२^२ + ०^२)} ४ \xrightarrow{४^२} १६ \xrightarrow{(१^२ + ६^२)} ३७$$
$$\xrightarrow{(३^२ + ७^२)} ५८ \xrightarrow{(५^२ + ८^२)} ८९$$

(४९ वर ही प्रक्रिया केल्यास उत्तर १ येते)

ब) १५३ ही संख्या अनेक प्रकारे निर्माण होते :

$१५३ = १ + २ + ३ + ... + १६ + १७$

$१५३ = १^३ + ५^३ + ३^३$

(असा गुणधर्म असलेल्या संख्येला आत्मप्रेमी संख्या म्हणतात)

$१५३ = १! + २! + ३! + ४! + ५!$

(क! म्हणजे क × (क−१) × (क−२).... × २ × १.

उदा. ४! = ४ × ३ × २ × १ = २४)

कुठलीही तीन अंकी अशी धन पूर्णांक संख्या घेतली, ज्यामधील प्रत्येक अंकाला तीनने पूर्ण भाग जात असेल, व त्या प्रत्येक अंकाचा घन केला आणि त्यांची बेरीज केली, असे परत परत केल्यास नेहमी उत्तर १५३ असे येते. उदाहरण म्हणून आपण ६३३ ही संख्या घेऊया ज्यातील सर्व अंकांना ३ने पूर्ण भाग जातो. त्यावर सदर प्रक्रिया बाणांवर खाली दाखवली आहे :-

$$६३३ \xrightarrow{(६^३+३^३+३^३)} २७० \xrightarrow{(२^३+७^३+०^३)} ३५१ \xrightarrow{(३^३+५^३+१^३)} १५३$$

क) ६६६ ही संख्या देखील विस्मयकारक असून विविध स्वरूपात मांडता येते. या संख्येबाबत ख्रिस्ति धर्मग्रंथात बरेच बरे-वाईट अर्थ दिले गेले आहेत.

$६६६ = १^३ + २^३ + ३^३ + ४^३ + ५^३ + ६^३ + ५^३ + ४^३ + ३^३ + २^३ + १^३$

$६६६ = ३^६ - २^६ + १^६$

$६६६ = ६ + ६ + ६ + ६^३ + ६^३ + ६^३$

$६६६ = २^२ + ३^२ + ५^२ + ७^२ + ११^२ + १३^२ + १७^२$, (म्हणजेच पहिल्या सात मूळ संख्येच्या वर्गांची बेरीज)

खाली दिलेल्या ६ × ६ जादूच्या चौरसातील प्रत्येक उभ्या, आडव्या, दोन्ही मुख्य कर्ण रेषा तसेच दोन तुटक रेषा ओढलेले समांतर उपकर्ण यावरील संख्याची बेरीज ६६६ अशी येते (ए.डब्ल्यू. जॉन्सन यांची ही निर्मिती आहे) :-

३	१०७	५	१३१	१०९	३११
७	३३१	१९३	११	८३	१५१
१०३	५३	७१	८९	१५१	१९९
११३	६१	९७	१९७	१६७	३१
३६७	१३	१७३	५९	१७	३७
७३	१०१	१२७	१७९	१३९	४७

अन्य गणिती मत प्रवाह

वरील उदाहरणे अंक व संख्यांच्या विविध छटा तसेच आश्चर्यकारक गणिती संबंध दाखवतात. काही वेळा हे संबंध नाट्यमय वाटतात. मात्र तसे असणे हा केवळ योगायोग आहे आणि गणिती प्रक्रिया करण्याच्या विशिष्ट पद्धतींमुळे असे घडते, असा दुसरा मत प्रवाह आहे. त्याला *रूपवाद* किंवा *औपचारिकतावाद* (फॉर्मेलिझम) म्हणतात. बहुतांश गणितज्ञ गणितीकार्य करताना हीच भूमिका घेतात. *अंतः प्रेरणावाद* (कन्स्ट्रक्टिव्हिजम) नावाचा तिसरा मत प्रवाह गणिताला संपूर्णपणे व प्रत्येक वेळी मानवी मनाची निर्मिती मानतो, आणि चिन्ह व भाषेद्वारे त्याची देव-घेव होते असे सांगतो. ह्या मताला मानणारे गणितज्ञ मात्र अल्पसंख्येत आहेत.

गणिताची रंजकता अशा अंक व संख्या आणि त्याच्या विशेष गुणधर्मांनी कायम राहिली आहे हे सर्व मान्य करतात. त्यामुळे असे नवीन संबंध शोधून काढण्यात वेगळाच आनंद दडला आहे. संपूर्ण आयुष्य अंकशास्त्राला झोकून दिलेल्या जगप्रसिद्ध गणितज्ञ पॉल एरडॉश (१९१३–१९९६) यांनी $म^{२} = न! + १$ या समीकरणासाठी फक्त तीन पूर्णांकाच्या जोड्या खेरीज उत्तर नाही असे म्हटले आहे (म = ५, न = ४; म = ११, न = ५; म = ७१, न = ७). तुम्हाला काही नवे उत्तर सापडते का बघा.

⌘⌘⌘

३

मोठेपणाचे गणित

माणसाला मोठ्या गोष्टींचे आकर्षण सतत वाटत राहिलेले आहे. पर्वतांची उंच शिखरे पादाक्रांत करणे, महाकाय जहाजे बांधणे आणि उत्तुंग मनोरे उभे करणे अशी कित्येक उदाहरणे या संदर्भात देता येतील. अशा प्रचंड आकाराच्या वस्तू निर्माण करण्यासाठी आकार मोजणीच्या मोठ्या संख्या व त्यांचे गणित विकसित करणे हे त्यामुळे स्वाभाविकपणे घडले. म्हणूनच जगातील जवळपास सर्व भाषांमध्ये मोठ्या संख्या दर्शवणाऱ्या संज्ञा किंवा शब्द आढळतात. अर्थातच मोठ्या संख्याची निर्मिती यांत्रिकपणे करत राहणे शक्य आहे, पण त्यांची आपल्या विश्वाशी अर्थपूर्ण सांगड घातली गेली असेल तरच त्या विचारात घेतल्या पाहिजेत. आपण तशी काही उदाहरणे बघुया.

महाभारत युद्ध

महाभारतात वर्णन केलेल्या युद्धात कौरवांच्या ११ व पांडवांच्या ७ अशा एकूण १८ अक्षौहिणी सैन्याने भाग घेतल्याचा उल्लेख आहे. ही संख्या युद्धाची भव्यता किंवा भयानकता किती प्रमाणात दाखवते ते बघुया. त्या सेनेचे प्राथमिक एकक पत्ति असे होते. एक पत्तिमध्ये १ रथ, १ गज, ३ अश्व आणि ५ नर असा समूह असे. त्या आधारे खालील वाढत जाणारे गट तयार केले जात :

३ पत्ति	= १ सेनामुख
३ सेनामुख	= १ गुल्म
३ गुल्म	= १ गण
३ गण	= १ वाहिनी

३ वाहिनी	= १ पृतना
३ पृतना	= १ चमू
३ चमू	= १ अनीकिनी
१० अनीकिनी	= १ अक्षौहिणी

म्हणजे, १ अक्षौहिणी = २१,८७० रथ + २१,८७० गज + ६५,६१० अश्व + १,०९,३५० नर, असे सैन्याचे चित्र मिळते. अशा १८ अक्षौहिणी सेनेचा संग्राम एकाच रणक्षेत्रात केंद्रित झाल्यावर त्या साठीची एकूण जागा, रसद, भोजन व्यवस्था आदी बाबी किती प्रचंड प्रमाणात करणे आवश्यक ठरले असेल हे लक्षात येते. तसेच ते युद्ध १८ दिवसात संपले व जवळजवळ सर्व सैन्याचा (दोन्ही पक्षाच्या) त्यात नाश झाला ही बाब युद्धात वापरलेल्या शस्त्र व अस्त्रांची टोकाची प्रखरता दाखवते.

बुद्धीचातुर्य

आपल्या वैभव आणि क्षमतेचा गर्व असलेल्या एका राजाने बक्षिस म्हणून तुला काय पाहिजे अशी विचारणा केल्यावर एका हुशार माणसाने बुद्धिबळाच्या पटावरील पहिल्या घरात एक, दुसऱ्या घरात दोन, तिसऱ्या घरात चार या प्रकारे मागच्या घराच्या दुप्पट पुढील घरात या संख्येने पटाच्या ६४ घरात राहतील इतके गव्हाचे दाणे मागितले. राजाला ते मान्य करण्यात काही समस्या वाटली नाही. पण प्रत्यक्षात ते दाणे किती होतील याची संख्या त्याच्या खजिनदाराने गणित करून मांडली तेव्हा तेवढे गव्हाचे दाणे त्यालाच काय, या भूतलावरील कोणाही व्यक्तिला देणे जमणार नाही असे दिसून आले. गणिती रूपात ही संख्या $२^{६४}$ – १ = १८,४४६, ७४४, ०७३, ७०९, ५५१, ६१५ अशी महाकाय आहे. मात्र राजाने त्या व्यक्तीस असे पटाच्या प्रत्येक घरासाठी दिले जाणारे दाणे मोजून घेण्यास सांगितले असते तर डाव उलटला असता, कारण एका सेकंदाला एक अशी दाणे मोजण्याची गती मानली तरी शेवटच्या घरापर्यंत पोहचण्याच्या फार फार आधीच त्या व्यक्तीचे आयुष्य संपले असते, असे गणित दाखवते.

गलिव्हरच्या गोष्टी

जोनाथन स्विफट (१६६७–१७४५) लिखित 'गलिव्हरच्या सफरी' या १७२६ मध्ये प्रकाशित पुस्तकात गलिव्हरने पहिले लिलीपूट व नंतर

ब्रोब्डिंग्नाजियान या दोन देशाचे वर्णन केले आहे. लिलीपूट मधील सर्व वस्तू, प्राणी व माणसे यापेक्षा आपण सर्व बाबतीत १२ पटीने मोठे, तर बोब्डिंग्नाजियनमधील सर्व वस्तू, प्राणी व माणसे आपल्यापेक्षा १२ पटीने मोठी होती असे नमूद केले आहे. गलिव्हरला समुद्र किनाऱ्यापासून शहरात लिलीपूटच्या १५०० घोड्यांनी ओढून आणले, त्याचे खाणेपिणे १,७२८ प्रौढ लिलीपूट नागरिकांइतके ठरवण्यात आले, ३०० शिंप्यानी त्याचा कोट एका दिवसात शिवला असे अनेक उल्लेख पहिल्या प्रकरणात आहेत, तर दुसऱ्या प्रकरणात ब्रोब्डिंग्नाजियानमधील व्यक्तीच्या बोटातील अंगठी गलिव्हरच्या गळ्याभोवती बसली, झाडावरून पडलेल्या बोरापासून त्याचा जीव थोडक्यात वाचला असे वर्णन आहे. या सर्व बाबी मोठ्या आकारासंबंधी अचूक चित्र निर्माण करतात, कारण गणिताने तपासल्यास ती सर्व माहिती काटेकोरपणे मांडल्याचे आढळते. गलिव्हरच्या सफरी काल्पनिक असल्या तरी प्रचंडपणा सांगणारे त्यांचे गणित बरोबर आहे हे मात्र खरे.

प्राचीन भारतीय गणित

सातव्या शतकातील भारतीय गणिती ब्रह्मगुप्त याला अतिविशाल संख्याचे फार आकर्षण होते म्हणूनच त्याच्या समीकरणांची उत्तरे मोठ्या संख्यातली होती. ती शोधून काढणे गणितज्ञांना आव्हान ठरलेले आहे. उदाहरणार्थ, क्ष^{२}–९२ज्ञ^{२} = १ या त्याच्या समीकरणाचे पूर्णांकात उत्तर काढणे वाटते तेवढे सोपे नाही. या समीकरणाचे उत्तर एका वर्षाच्या आत काढणाऱ्या व्यक्तीस गणितज्ञ मानावे असे त्याचे मत होते. गणितात अशा प्रकारची अनेक समीकरणे आहेत.

हिंदू कालगणनेत ब्रह्मदेवाचा एक दिवस आपल्या ४,३२०,०००,००० वर्षांइतका व एक रात्र पण तितक्याच वर्षांची आहे असा उल्लेख आहे. असे ३६० दिवस आणि रात्री मिळून ब्रह्माचे एक वर्ष म्हणजे आपली ३,११०,४००,०००,००० वर्षे होतात. ब्रह्माचे आयुष्य शंभर वर्षे म्हणजे एक महाकल्प असे मांडले असून अशी दोन महाकल्पे झाल्यावर परत काळाचा आरंभ होता असे मानले जाते. ह्या सर्व संख्या काळाच्या अगडबंब व्याप्तीची कल्पना देण्याचा प्रयत्न पुरातन काळापासून करत आहेत हे विशेष. आधुनिक खगोल विज्ञानाप्रमाणे आपल्याला ज्ञात असलेल्या विश्वाचे आताचे वय १३,७००,०००,००० वर्षे असे आहे.

खगोल जगत

ग्रह, तारे, दीर्घिका व अन्य खगोलीय वस्तूंतील अंतरे ही पण प्रचंड प्रमाणात मोठी आहेत. उदाहरणार्थ, सूर्य व पृथ्वी मधील अंतर १४९,५९८,००० किलोमीटरर्स आहे. अशी अंतरे मोजण्याची फूटपट्टी ही वगेळीच आहे. तिला प्रकाशवर्ष म्हणतात. प्रयोगांनी असे सिद्ध झाले आहे की प्रकाशाची निर्वातातील गती २९९,७९२,४५८ मीटर्स प्रति सेकंद अशी आहे. त्यावरून एका वर्षात प्रकाश १,४६०,७३०,४७२,५८०.८ किलोमीटर्स अंतर पार करतो आणि या अंतराच्या संख्येला एक प्रकाशवर्ष म्हटले जाते. उदाहरणार्थ आपल्या सूर्याच्या सर्वात जवळचा प्रॉक्सिमा सेन्टौरी हा तारा त्याच्यापासून ४.२ प्रकाशवर्षे इतक्या अंतरावर आहे.

साहाजिकच जरी मोठ्या संख्याना नियमित श्रेणीने विविध संज्ञा दिल्या असल्या जशा की परार्ध ($१०^{१२}$), व्हीजिन्टीलियन ($१०^{६३}$ किंवा $१०^{१२०}$), गुगोल ($१०^{१००}$) आणि सेंटीलियन ($१०^{३०३}$ किंवा $१०^{६००}$), तरी त्यांना दहाच्या घातांकाने लिहिणे व लक्षात ठेवणे जास्त सोयीचे ठरते. उदाहरणार्थ, रसायन विज्ञानातील एव्होगॅड्रोचा अंक हा ६.०२×१०^{२३} म्हणजे ६.०२ गुणिले एका वर २३ शून्य असा आहे, पृथ्वीचे वजन ५४×१०^{२३} किलोग्रामस् तर सूर्याचे वजन $१९,८८५ \times १०^{२६}$ किलोग्रामस् आहे.

वरील चर्चेवरून लक्षात येते की मोठी मोजमापे पेलण्यात व त्यावर प्रक्रिया करण्यात गणिताचा सहभाग फार महत्त्वाचा आहे. म्हणूनच काही वेळा अगदी मर्यादित छोट्या संख्यानी आणि कमीत कमी गणिती प्रक्रिया वापरून मोठ्यात मोठी संख्या तयार करण्याच्या स्पर्धा आयोजित केल्या जातात. गणिताची अशी विराट शक्ती मानवाच्या स्वप्नांना प्रत्यक्षात उतरवण्यास पुढेही मार्गदर्शक ठरेल यात शंका नसावी.

पूरक माहिती :

- गणिती व तांत्रिकी प्रगतीमुळे उपलब्ध असलेल्या आधुनिक शस्त्र व अस्त्रांची मानव जीवहानी करण्याची क्षमता पुढीलप्रमाणे वाढत गेली आहे (*बुलेटिन ऑफ द ॲटॉमिक सांयटिस्टस्,* मार्च १९७८) : एक वर्ग मीटर भूमिवर चार निशस्त्र उभी माणसे अशी घनता असलेल्या विस्तारित समूहावर सतत एक तास सदर शस्त्रास्त्रे वापरल्यास घडू शकणारी क्षति,

साधन	जखमी/मृतांची संख्या
तलवार	२०
प्रगत धनुष्यबाण (क्रॉसबो)	३२
बंदूक (१९व्या शतकातील)	१५०
मशीनगन (प्रथम महायुद्ध)	१३,०००
रणगाडा (प्रथम महायुद्ध)	६८,०००
तोफ (प्रथम महायुद्ध)	४,७०,०००
तोफ (द्वितीय महायुद्ध)	६,६०,०००
रणगाडा (द्वितीय महायुद्ध)	२२,००,०००
विमान बाँबफेक (द्वितीय महायुद्ध)	३०,००,०००
२० किलोटन अणुबाँब	४,९०,००,०००
एक मेगाटन हायड्रोजन बाँब	६६,००,००,०००

या मोठ्या संख्या जागतिक स्तरावर विध्वंस करण्याची मानवी ताकद व्यक्त करतात आणि शहाणपणाने वागण्याचा सल्ला सर्वांना देतात.

⌘⌘⌘

४

लहान–मोठे गणित

गणितातील अनेक प्रश्न दिसण्यास अगदी लहानसे, सोपे असतात, पण त्यांची उत्तरे प्रचंड अशी मिळतात, तर काही वेळा प्रश्न सकृतदर्शनी जटील दिसतो पण उत्तर काढणे सहज असते. उत्तर संपूर्णपणे निर्माण करणे (कंस्ट्रक्शन) आणि फोड करून उत्तराचे अस्तित्व सिद्ध करणे (एक्सिस्टन्स) अशा दोन भिन्न पद्धती गणिती प्रश्न सोडवण्यासाठी सहसा वापरल्या जातात. या लेखात आपण अशा अंदाज न देणाऱ्या काही प्रश्नांचा उहापोह करूया.

उदाहरणे

उदाहरण १ : $२^{४३}$ या संख्येचा डावीकडून पहिला अंक काय असेल ?

एक धोपटमार्गी पद्धत म्हणजे २ ला ४३ वेळा गुणायचे, हातानी अथवा गणक/संगणक वापरून, आणि आलेले मोठे असे उत्तर पहिल्या अंकासाठी तपासायचे. ती म्हणजे उत्तर–निर्मित पद्धत.

दुसरी पद्धत म्हणजे $२^{४३}$ ची फोड करून उत्तर काढणे.

$२^{४३} = (२^{१०})^{४} \times २^{३} = (१०२४)^{४} \times २^{३} = (१०००+२४)^{४} \times ८.$

हा कंस उघडणे (बायनोमिअल प्रमेय वापरून, उदाहरणार्थ) असे केल्यास उत्तर १ ने सुरू होते व त्याला ८ ने गुणल्यावर मिळणारी संख्या ८ ने सुरू होणार असे आपल्या प्रश्नाचे उत्तर मिळते.

उदाहरण २ : $३^{१९१९४}$ या संख्येचा उजवीकडून पहिला अंक काय असेल ?

इथे देखील उत्तर–निर्मिती पद्धती वापरणे शक्य आहे पण ती अर्थातच किचकट ठरू शकते. आपण त्याऐवजी थोडा विश्लेषणात्मक मार्ग वापरू.

आपण सहजपणे बघू शकतो की, $३^{१} = ३$, $३^{२} = ९$, $३^{३} = २७$, $३^{४} = ८१$ आणि $३^{५} = २४३$. याचा अर्थ की घातांक ४च्या पुढे नेल्यास निर्माण होणाऱ्या संख्यांचा शेवटचा अंक ३, ९, ७ आणि १ या चक्राप्रमाणेच मिळत राहील. लक्षात घ्या की शेवटी येणार १ हा अंक ($३^{४}$ मध्ये) आपल्यासाठी फार उपयुक्त ठरणार आहे.

तरी $३^{१९१९४} = (३^{४})^{४७९८} \times ३^{२} = (३^{४})^{४७९८} \times ९$.

आता $(३^{४})^{४७९८}$ ह्या संख्येचा वर सांगितल्याप्रमाणे उजवीकडून पहिला अंक १ असेल आणि त्या संख्येला ९ ने गुणल्यावर येणाऱ्या संख्येचा उजवीकडून पहिला अंक ९ असेल असे आपल्या प्रश्नाचे उत्तर मिळते.

लक्षात घ्या आपण संपूर्ण संख्या काय असेल किंवा तिची निर्मिती करणे पूर्णपणे टाळले आहे व केवळ अंकाच्या काही प्राथमिक प्रक्रिया व गुणधर्मांचा वापर केला आहे.

उदाहरण ३ : समजा भारताची लोकसंख्या १ जानेवारी २०१२ रोजी १२० कोटी होती. त्या सर्व आबाल-वृद्धांचे वजन बघितल्यास ते सरासरी ५० कि.ग्रा. असे आहे हे मानुया, आणि एका किलोग्राममध्ये ६० मिलिलिटर रक्त असते अशी माहिती उपलब्ध आहे. तरी या सर्व लोकांचे सगळे रक्त बाहेर काढून ठेवायचे झाल्यास किती मोठी टाकी लागेल ?

हे गणित वाचल्यावर उत्तर खूप मोठे येणार असा समज बहुधा होतो, कारण भारताची लोकसंख्या इतकी प्रचंड आहे. आता प्रत्यक्ष त्या रक्ताचे घनफळ असे आहे :

$५० \times ६० \times १२०० \times १०^{६} = ३६० \times १०^{१०}$ मिलिलिटर्स

म्हणजेच त्याला $१०^{९}$ ने भागल्यास, ३६०० घन मीटर्स एवढ्या क्षमतेची टाकी पुरेशी आहे असे दिसते. याचा अर्थ माफक लांबी, रुंदी व उंची असलेली टाकी चालू शकेल उदाहरणार्थ, २० मी लांबी, १८ मी. रुंदी व १० मी. उंची असलेली. अर्थातच अशी अनेक मोजमापे व आकार यांचा विचार करता येईल. पण उत्तर अगदी मर्यादित संख्येत मिळते हे अचंबित करते.

उदाहरण ४ : समजा आपल्याकडे पितळेची २७ वजने आहेत आणि त्यांची $१^{२}, २^{२}, ३^{२}, \ldots, २७^{२}$ या प्रकारे क्रमशः वजने आहेत. आपण त्यांना तीन गटात कशा प्रकारे विभागू शकू की प्रत्येक गटाचे एकूण वजन सारखेच असेल ?

आता आपण सगळ्या वजनांची बेरीज केल्यास,

$१^२ + २^२ + ३^२ + ... + २७^२ = ६९३० = ३ \times २३१०$ असे उत्तर मिळते. याचा अर्थ प्रत्येक गटातील वजनांची बेरीज २३१० असली पाहिजे. या पुढे जाण्यासाठी मात्र आपल्याला उत्तरनिर्मिती या प्रक्रियेचा वापर करणे आवश्यक आहे. आणि असा शोध घेण्यासाठी संगणकाची मदत फार उपयुक्त ठरते. तरी तसे केल्यास आपल्याला खालील प्रमाणे तीन गट प्राप्त होतात :

गट १ : $१^२ + २^२ + ३^२ + ४^२ + ५^२ + ६^२ + ७^२ + ८^२ + ९^२ + १०^२ + ११^२ + १३^२ + १४^२ + १५^२ + १८^२ + १९^२ + २३^२$

गट २ : $१२^२ + १७^२ + २४^२ + २५^२ + २६^२$

गट ३ : $१६^२ + २०^२ + २१^२ + २२^२ + २७^२$

अर्थातच या पेक्षा वेगळे गट देखील शोधता येऊ शकतात.

उदाहरण ५ : अशी किमान पूर्णांक असलेली संख्या शोधा जिचा डावीकडील पहिला अंक काढून उजवीकडे सर्वात शेवटी लिहिल्यावर प्राप्त होणारी नवी संख्या मूळ संख्येच्या दीडपट मोठी असेल (३/२ किंवा १.५ पटीने मोठी).

हा प्रश्न दिसण्यात सोपा आहे, पण सोडवण्यासाठी अंकशास्त्राचे ज्ञान चांगल्या प्रमाणात असणे आवश्यक आहे. केवळ संगणकाचा वापर करून सोडवणे देखील जिकरीचे ठरेल. एक उल्लेखनीय बाब म्हणजे हा प्रश्न डॉ. जे. बोरोन्विस्कीने *न्यू स्टेटस्‌मन अँड नेशन* या वर्तमानपत्रात दिनांक २४ डिसेंबर १९४९ रोजी लोकांना नाताळच्या सुटीत सोडवण्यासाठी दिला होता, आणि त्यावेळी लोकांना वापरण्यासाठी संगणक हा उपलब्ध नव्हता हे विशेष.

हा प्रश्न सोडवण्याची गणिती प्रक्रिया समजण्यास थोडी क्लिष्ट असल्यामुळे ती न मांडता केवळ उत्तर खाली दिले आहे. ती मूळ किमान पूर्णांकातील संख्या अशी आहे :

११७६४७०५८८२३५२९४

हे उत्तर थक्क करणारे असून गणिती प्रक्रियांची क्षमता दाखवते. कारण धोपटमार्गाने हा प्रश्न सोडवणे जवळपास अशक्य आहे.

कृपया लक्षात घ्या की सदर उदाहरणे अंक आणि संख्या यापुरती नमुना दाखल आहेत. गणिताच्या प्रत्येक शाखेत या प्रकारचे चकवे देणारे प्रश्न उपलब्ध आहेत. त्यातील काही केवळ मनोरंजनासाठी मर्यादित आहेत. उदाहरणार्थ, ०.००७५ सेंटीमीटर जाडीचा एक कागदाचा मोठा तुकडा घेतला व त्याची ५१ वेळा घडी घातल्यास किती जाडीचा तुकडा शेवटी मिळेल, हा प्रश्न काहीसा काल्पनिक आहे. कारण प्रत्यक्षात कागदाच्या इतक्या घड्या घालणे सहसा जमण्यासारखे नाही, मात्र गणिती जगात ही शक्यता नाकारली जात नाही. या प्रश्नाचे उत्तर फारच मोठी संख्या येते असे आहे. तरी असे प्रश्न अनेक वेळा वेगळ्या प्रकारे विचार करणे, प्रश्नाचे रूप बदलणे आणि गणिती प्रक्रियांचा कल्पकतेने वापर करणे यांना चालना देतात.

उपयुक्तता

गणिताचा इतिहास असे दाखवतो की तार्किक आणि औपचारिक प्रक्रिया इतकेच अशा प्रश्नांना सोडवण्याचे इतर विविध प्रयत्न गणिताला पुढे नेण्यास उपयोगी ठरले आहेत. मुख्य म्हणजे असे प्रश्न गणिताच्या उपयोजनासाठी अतिशय महत्त्वाची भूमिका पार पाडतात.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

⌘⌘⌘

५

आयएसबीएन :
प्रत्येक पुस्तकाचा विशिष्ट ओळख क्रमांक

कुठल्याही प्रक्रियेची गणिती मांडणी बहुधा अमूर्त स्वरूपात असली तरी गणिताचा उगम आणि उपयोग सहसा आपल्या दैनंदिन आयुष्यातील व्यवहारापासून ते अतिप्रगत तांत्रिक प्रणाली निर्माण करण्यासाठी होत आलेला आहे. त्यात कुठल्याही सजीव किंवा निर्जीव गोष्टींची विशिष्ट अंक किंवा क्रमांक याद्वारे ओळख निश्चित करून विविध गणिती सोपस्कार करणे ही महत्त्वपूर्ण पायरी असते. उदाहरणार्थ, शैक्षणिक किंवा इतर संस्थांतील हजेरीपटावरील विद्यार्थी, कर्मचारी, तसेच तुरुंगातील कैदी यांची ओळख क्रमांकाने केली जाते. दूरध्वनी क्रमांक व आपल्या विभागासाठी पोस्टाने ठरवलेला पिन कोड क्रमांक याच धर्तीचा असून त्यामुळे सेवा पुरवण्यास मदत मिळते. आपल्या देशात हाती घेतलेली 'आधार' योजनापण अशाच हेतूने आखली आहे. काही बाबतींत अंकांच्या जोडीला अक्षरे घेऊन क्रमांकांची व्याप्ती वाढवणे व ओळख सहज पटणे अशी व्यवस्था केली जाते. उदाहरणार्थ, वाहनांचा ओळख क्रमांक. असा क्रमांक प्रत्येक गोष्टीसाठी एकमेव असावा ज्यामुळे त्यासंबंधीची माहिती माणसाला तसेच संगणक प्रणालीला हाताळताना कुठलाही गोंधळ उडू नये हेच उद्दिष्ट असते. या प्रकारचे खास क्रमांक मोठ्या प्रमाणात निर्माण करण्यासाठी गणितातील काही पद्धती वापरल्या जातात.

येथे प्रकाशित पुस्तकासाठी त्याचा स्वतःचा विशिष्ट असा क्रमांक, ज्याला **'इंटरनॅशनल स्टँडर्ड बुक नंबर' (आयएसबीएन)** असे म्हणतात, त्याचे गणित, अर्थ व इतर संलग्न माहिती उदाहरणांसह दिली आहे.

‘आयएसबीएन’चा आरंभ

मागील काही दशकांत, जगभर विविध भाषांत आणि अनेकविध विषयांवर प्रकाशित होणारी पुस्तके, यांची संख्या फार मोठ्या प्रमाणात वाढू लागल्यामुळे त्यांचा मागोवा घेणे प्रकाशक, वितरक, ग्रंथालये व ग्राहक या सर्वांना जिकिरीचे होऊ लागले. पुस्तकाच्या अचूक ओळखीसाठी किमानपणे लेखकाचे नाव, पुस्तकाचे शीर्षक व प्रकाशकाचे नाव ही माहिती काटेकोरपणे असणे आवश्यक ठरते. साहजिकच, अशी अनेक शब्दांद्वारे पुस्तकाची माहिती बिनचूकरीत्या देवघेव व इतर सोपस्कारांसाठी वापरणे गैरसोयीचे वाटू लागले. त्यावर उपाय म्हणून प्रत्येक पुस्तकाची एका क्रमांकाद्वारे विशिष्ट ओळख सांगणारी एक व्यवस्था १९६६ साली ट्रिनिटी कॉलेज, डब्लिन, आयर्लंडमधील संख्याशास्त्राचे (सांख्यिकीचे) सन्माननीय निवृत्त प्राध्यापक गार्डन फोस्टर यांनी विकसित केली. त्यांनी प्रत्येक पुस्तकासाठी नऊ आकडी क्रमांक देण्याची एक पद्धत मांडली. असा क्रमांक काही पुस्तक विक्रेत्यांनी वापरण्यास सुरुवात केली व ती पद्धत लोकप्रिय होऊ लागली.

सदर व्यवस्थेची उपयुक्तता लक्षात घेऊन ‘इंटनरनॅशनल ऑर्गनायझेशन फॉर स्टँडर्डायिझेशन’ (आयएसओ) या आंतरराष्ट्रीय संस्थेने १९७० मध्ये ISO २१०८ या प्रमाण क्रमांकाने पुस्तकासाठी ‘इंटरनॅशनल स्टँडर्ड बुक नंबर (आयएसबीएन) हा क्रमांक कसा असावा याची प्रमाणित पद्धत प्रसिद्ध केली. ह्या पद्धतीत ‘आयएसबीएन’ हा एकूण दहा आकडी क्रमांक असून त्याचे चार भाग असतात. ते भाग ‘–’ या संयोगचिन्हाने किंवा एका रिक्त स्थानाने विभागलेले असतात. उदहारणार्थ, ISBN ८१–७४३४–२३८–९. हे चार भाग खालील बाबींशी निगडीत असतात व त्यांची व्याख्या वरील पुस्तक क्रमांकासाठी अशी आहे :

भाग १ : ८१, हा गटनिर्देशक असतो व तो १ ते ५ आकडी असू शकतो. तो भाषासमूह किंवा देश दाखवतो.

भाग २ : ७४३४, हा प्रकाशाची ओळख सांगतो. तो १ ते ७ आकडी असू शकतो.

भाग ३ : २३८, हा पुस्तकाचे शीर्षक दर्शवतो. तो १ ते ७ आकडी असू शकतो.

भाग ४ : ९, हा तपासणी अंक असतो व तो फक्त एक आकडी असतो. त्यामुळे ‘आयएसबीएन’ क्रमांक प्रत्येक पुस्तकासाठी एकमेव राहतो.

वरील व्यवस्थेवरून लक्षात येईल, की पहिले तीन भाग एकूण नऊ आकड्यांत मांडणे हे अनेकविध प्रकाराने शक्य आहे. या तीन भागांबद्दल अधिक माहिती पुढे दिली आहे. चौथा भाग, म्हणजेच तपासणी अंक, गणितातील 'मॉड्यूलर' अंकगणित या पद्धतीने काढला जातो. या पद्धतीबाबतची चर्चा सोबतच्या चौकटीत प्रस्तुत आहे.

मॉड्यूलर अंकगणित

काळी वेळा आपल्यासाठी एखाद्या पूर्णांकाला दुसऱ्या एका पूर्णांकाने भाग दिल्यावर उरलेला अंक अधिक महत्त्वाचा ठरू शकतो. ह्या प्रक्रियेला 'मॉड्यूलर' अंकगणित असे म्हणतात व 'मॉड' या शब्दाने ती संबोधली जाते. उदाहरणार्थ, ४० मॉड ७ याचे उत्तर ५ असे येते, कारण ४० ला ७ ने भाग दिल्यावर ५ बाकी उरतात.

या प्रक्रियेच्या उपयोगाचे एक साधे उदाहरण पाहू या. दिनांक १० फेब्रुवारी, २०१२ रोजी शुक्रवार होता, तर ५ मार्च, २०१२ रोजी कुठला वार असेल हे शोधण्यासाठी या दोन तारखांतील अंतर २४ दिवस या पूर्णांकाला आठवड्याचे दिवस ७ या पूर्णांकाने भाग दिला, की ३ बाकी उरतात. याचा अर्थ शुक्रवारापुढे तीन दिवसांनी येणारा सोमवार हा वार ५ मार्च, २०१२ रोजी असेल. या प्रक्रियेचा वापर सांकेतिक भाषेतील देवघेव, तसेच अंकीय स्वाक्षरी (डिजिटल सिग्नेचर) तयार करण्यात होतो, ज्यामुळे आंतरराष्ट्रीय स्तरावरील संगणकामार्फत होणाऱ्या प्रचंड आर्थिक उलाढाली सुरळीतपणे चालत आहेत.

वरील उदाहरणात '९'हा तपासणी अंक कसा आला हे आपण बघू या. यासाठी दोन पद्धती आहेत.

पद्धत १ : या पद्धतीत डाव्या अंकापासून उजवीकडे तीन भागांतील प्रत्येक अंकाला १, २, ..., ९ यांनी क्रमशः गुणायचे व नंतर त्या गुणाकारांची बेरीज करून ११ ने भागायचे आणि बाकी राहिलेल्या अंकाला 'तपासणी अंक' म्हणून वापरायचे. वरील उदाहरणासाठीचा तपासणी अंक,

$$अ_{१०} = (८ \times १ + १ \times २ + ७ \times ३ + ४ \times ४ + ३ \times ५ + ४ \times ६ + २ \times ७ + ३ \times ८ + ८ \times ९) \text{ मॉड } ११$$
$$= (१९६) \text{ मॉड } ११ = १७ \times ११ + ९,$$

म्हणजे बाकी राहिलेला ९ हा ‘तपासणी अंक’ झाला.

पद्धत २ : या पद्धतीत डाव्या अंकापासून उजवीकडे जात तीन भागांतील प्रत्येक अंकाला १०, ९, ………, २ यांनी क्रमशः गुणायचे. नंतर त्या गुणाकाराची बेरीज करून ११ ने भागायचे व बाकी राहिलेला अंक ११ मधून वजा करून आलेला अंक तपासणी अंक म्हणून वापरायचा. वरील उदाहरणासाठीचा तपासणी अंक,

$$अ_{१०} = (११ - (८ \times १० + १ \times ९ + ७ \times ८ + ४ \times ७ + ३ \times ६ + ४ \times ५ + २ \times ४ + ३ \times ३ + ८ \times २) \text{ मॉड } ११)$$

$$= (११ - (२४४) \text{ मॉड } ११)$$

$$= (११-२) = ९,$$ (कारण (२४४) मॉड ११ = २२×११+२, म्हणजे बाकी राहिलेला २ वापरायचा)

ह्या प्रकारे ९ हा तपासणी अंक प्राप्त झाला.

टिपा : १) दोन्ही पद्धतींसाठी संगणक आज्ञावली तयार करणे सहज शक्य आहे. २) तपासणी अंक १० आल्यास त्याला रोमन अंकप्रणालीतील ‘x’ हे चिन्ह वापरून दाखवले जाते, कारण तपासणी अंक एक आकडी असणे आवश्यक आहे.

आयएसबीएनची पुढील वाटचाल

माहिती आणि ज्ञान प्रसारणाचे कागदाधारित मुद्रित पुस्तकाखेरीज अंकीय स्वरूपातील विविध माध्यमे व प्रकार मागील काही वर्षांत मोठ्या प्रमाणात विकसित झाले आहेत. तरी, अशा प्रकारच्या माहितीस्त्रोतांनापण आयएसबीएन क्रमांक देण्याची पद्धत अमलात आली आहे. त्यासाठी मूळ ९ आकडी आयएसबीएन १२ आकडी करण्यात आले आहे. म्हणजेच, शेवटचा तपासणी अंक धरून आयएसबीएन १३ आकडी झाला आहे. यासाठी एक अतिरिक्त ३ आकडी भाग प्रथम जोडण्यात येतो, जो वेगवेगळी मध्यमे दर्शवतो. पारंपरिक मुद्रित पुस्तकासाठी सध्या ९७८ आणि ९७९ हे अंक निर्धारित केले असून पुस्तकाच्या आयएसबीएनची सुरुवात त्यापासून केली जाते. ही व्यवस्था १ जानेवारी, २००७ नंतर प्रकाशित होणाऱ्या पुस्तकांना लागू करण्यात आली आहे. आवश्यकता वाटल्यास जुना १० आकडी आयएसबीएन नवीन १३ आकडी आयएसबीएनमध्ये रूपांतरित करता येतो. आयएसबीएन क्रमांकाला अनेक प्रकाशक बार कोड स्वरूपात पुस्तकाच्या मागील पृष्ठावर छापतात.

आपण १३ आकडी ISBN ९७८-०-१९-५१२४४१-५ या क्रमांकाचा शेवटचा अंक ५ हा कसा आला ते बघू या.

पद्धत : या पद्धतीत डाव्या अंकापासून उजव्या बाजूला जात प्रत्येक अंकाला १ आणि ३ ने एक अंक सोडून एक या पद्धतीने गुणायचे व नंतर त्या गुणाकारांची बेरीज करून १० ने भागायचे आणि शेष राहिलेला अंक १० मधून वजा करून आलेला अंक तपासणी अंक म्हणून वापरायचा. असा अंक १० आला तर त्याला ० (शून्य) म्हणून लिहायचे. वरील उदाहरणातील तपासणी अंक,

$$\begin{aligned} अ_{१३} &= (१० - (९ \times १ + ७ \times ३ + ८ \times १ + ० \times ३ + \\ &\quad १ \times १ + ९ \times ३ + ५ \times १ + १ \times ३ + २ \times \\ &\quad १ + ४ \times ३ + ४ \times १ + १ \times ३) \text{ मॉड } १०) \\ &= (१० - (९५) \text{ मॉड } १०) \\ &= (१० - ५) = ५ \end{aligned}$$

म्हणजेच ५ हा तपासणी अंक मिळाला.

अगदी विरळ परिस्थितीत, दोन पुस्तकांना एकच आयएसबीएन येण्याची शक्यता आहे. त्यावर मार्ग आहे, पण त्या वेळी शेवटचा तपासणी अंक एक आकडी रहात नाही. याबाबत संशोधन चालू आहे.

आयएसबीएन मिळवणे

कुठल्याही विद्यमान किंवा नवीन प्रकाशकाला किंवा व्यक्तीला त्यांच्या पुस्तकासाठी आयएसबीएन मिळवणे अतिशय सोपे आहे. यासाठी बर्लिन, जर्मनी येथे मुख्यालय असलेल्या 'इंटरनॅशनल आयएसबीएन एजन्सी' या संस्थेची प्रत्येक देशात एक शाखा आहे, जी त्या देशात ही सेवा पुरवते.

भारतात 'राजा राममोहन रॉय नॅशनल एजन्सी फॉर आयएसबीएन' ही संस्था केंद्र सरकारच्या मानव संसाधन विकास मंत्रालयातील उच्च शिक्षण विभागाच्या आधिपत्याखाली असून प्रकाशकांना आयएसबीएन पुरवण्याचे काम करते. इच्छुक प्रकाशकाने सदर संस्थेच्या नवी दिल्ली येथील कार्यालयातून या संदर्भातले प्रपत्र मागवावे किंवा ते तिच्या संकेतस्थळावरून प्राप्त करावे (www.education.nic.in). या प्रपत्रात प्रकाशक व प्रकाशनाचे नाव, संपूर्ण पत्ता, आतापर्यंत प्रसिद्ध केलेल्या पुस्तकांची संख्या किंवा नजीकच्या भविष्यात प्रसिद्ध करण्यात येणाऱ्या पुस्तकांची अंदाजे संख्या अशी

माफक प्रमाणात माहिती भरायची असते. या माहितीवरून सदर आयएसबीएन प्रदान करणारी संस्था प्रकाशकाचा अनुरूप गट-दर्जा व क्रमांक इत्यादी आंतरराष्ट्रीय आयएसबीएन संस्थेने सांगितलेल्या मार्गदर्शक तत्त्वानुसार ठरवते. उदाहरणार्थ, प्रकाशक अनेक वर्षे त्या व्यवसायात असेल व त्याने बरीच पुस्तके प्रकाशित केली असतील, तर त्याचा गट क्रमांक छोटा व शीर्षकासाठी मोठा क्रमांक दिला जातो. अशा प्रकारे १० किंवा त्याहून अधिक पुस्तकांचे संपूर्ण आयएसबीएन क्रमांक (तपासणी अंकासह) सदर संस्था प्रकाशकाला पाठवते. उदाहरणार्थ, 'मराठी विज्ञान परिषदे'ला ४ हा गटाचा वरचा दर्जा दिला असून १०० पुस्तकांसाठीचे आयएसबीएन क्रमांक आगाऊच पाठवून दिले आहेत. ही संपूर्ण सेवा निःशुल्क आहे आणि प्रकाशकाला कुठलीही गणिती प्रक्रिया करावी लागत नाही हे विशेष.

मार्गदर्शक तत्त्वांनुसार कारवाई

पुस्तकाच्या प्रत्येक आवृत्तीसाठी (केवळ पुनर्मुद्रित नसल्यास) वेगळा आयएसबीएन क्रमांक द्यायचा असतो. तसेच, जरी पुस्तकाचे केवळ वेष्टण वेगळे असले, जसे की कागदी आणि पुठ्ठ्याचे, तरी त्यांना वेगवेगळा आयएसबीएन दिला जावा असे मार्गदर्शक तत्त्व सांगते. जर पुस्तक बहुखंडीय असेल, तर त्या पूर्ण मालिकेसाठी एक व त्यातील प्रत्येक खंडासाठी वेगवेगळा आयएसबीएन क्रमांक द्यावा आणि ते दोन्ही क्रमांक त्या-त्या खंडावर दिले जावेत, अशी सूचना आहे.

प्रकाशकाने आयएसबीएन क्रमांक पुस्तकाच्या मागील पृष्ठावर आणि शीर्षक पृष्ठाच्या मागच्या बाजूस इतर मुद्रण माहिती सोबत छापावा असे अपेक्षित असते. तसेच, त्या पुस्तकाचा मुद्रण तपशील व आयएसबीएन दाखवणारे पुस्तकाचे मलपृष्ठ किंवा शक्य असल्यास पुस्तकाची एक प्रत, देशातील आयएसबीएन संस्थेला पाठवावी अशी अपेक्षा केली जाते. प्रकाशक आणि त्याचा आयएसबीएन असलेल्या प्रत्येक प्रकाशनाची माहिती आंतरराष्ट्रीय आयएसबीएन संस्थेला वेळोवेळी कळवली जाते. ती संस्था प्रकाशकांच्या आंतरराष्ट्रीय सूचीत ती माहिती नंतर प्रसिद्ध करते. अशा प्रकारे प्रकाशकाची जागतिक स्तरावर आपसूक प्रसिद्धी होते. तरी भारतीय प्रकाशकांनी आयएसबीएनसंबंधी नोंदणी जरूर करावी. पुस्तकांचे मोठे खरेदी-विक्री व्यवहार, तसेच काही पुरस्कारांसाठी पुस्तकावर आयएसबीएन क्रमांक

आवश्यक ठरू शकतो. हल्ली शैक्षणिक मूल्यमापनात आयएसबीएन नसलेल्या पुस्तकात केलेले योगदान विचारात घेतले जात नाही.

नियतकालिकांसाठी 'आयएसएसएन'

आयएसबीएन धर्तीवर मासिकांसाठी 'इंटरनॅशनल स्टँडर्ड सीरियल नंबर' (आयएसएसएन) प्रदान करण्यात येतो, तो मात्र दोन भागांत असतो, उदाहरणार्थ, ISSN ०९७१-६७२६. मासिकाच्या प्रकाशकांना तो निःशुल्क मिळू शकतो. 'मराठी विज्ञान परिषद-पत्रिके'साठी ISSN ०९७१-६९१२ असा आहे. यातील शेवटचा अंक २ हा तपासणी अंक आहे व तो खालील गणिती पद्धतीने असा आला आहे.

$$
\begin{aligned}
\text{म}_{\text{८}} &= (\text{११} - (\text{०} \times \text{८} + \text{९} \times \text{७} + \text{७} \times \text{६} + \text{१} \times \text{५} + \text{६} \times \text{४} + \text{९} \times \text{३} + \text{१} \times \text{२}) \ \text{मॉड} \ \text{११}) \\
&= (\text{११} - (\text{१६३}) \ \text{मॉड} \ \text{११}) \\
&= (\text{११} - \text{९}) = \text{२}
\end{aligned}
$$

हल्ली 'आयएसएसएन' नसलेल्या मासिक किंवा जर्नलमधील लेखाला अनेक संस्था कमी लेखतात याची नोंद संशोधक आणि लेखकांनी घेणे महत्त्वाचे आहे. ध्वनिफीत, गाण्याची तबकडी व इतर नवीन माध्यमांसाठी-देखील असा क्रमांक आता देण्यात येतो.

ग्रंथालयांनी त्यांच्या पुस्तके व इतर साहित्य नोंदणी व्यवस्थेत आयएसबीएनची नोंद घेणे आवश्यक करावे. या क्रमांकाचा वापर ग्रंथालयीन प्रक्रिया व अनेक व्यावहारिक बाबी हाताळणे सुलभ करू शकतो.

काळाची गरज

पुस्तकांशी संबंधित अनेक व्यवहार संगणकाधारित प्रणालींनी करण्यासाठी 'आयएसबीएन' क्रमांक असावा असे आज बंधन नसले, तरी व्यावसायिकदृष्ट्या तो देणे ही काळाची गरज आहे. हा क्रमांक तयार करण्यात 'मॉड्यूलर अंकगणित' वापरले जाणे हे गणिताचा उपयोग एका वेगळ्या प्रकारच्या, पण व्यवहारोपयोगी कार्यासाठी होणे हे खचितच स्वागतार्ह आहे.

⌘⌘⌘

६

निर्देशांकाचे निर्देशन

मोजणे आणि तुलना करणे हा मनुष्याचा मूळ स्वभाव आहे, तर अनेक वेळा ती व्यावहारिक गरज ठरते. गणिताचा उगम व विस्तार होण्यास याच बाबी कारणीभूत ठरल्या आहेत. कुठलीही परिस्थिती सूचकपणे मांडण्यास अंकाचा वापर प्रभावी ठरू शकतो. उदाहरणार्थ, साधी टक्केवारी अनेकदा मोठा आशय व्यक्त करण्यास उपयोगी सिद्ध होते. १९९१ च्या जनगणनेनुसार भारतामधील एकूण साक्षरतेचा दर ५२% होता. त्या मध्ये पुरुष आणि स्त्रियांच्या साक्षरतेचा दर क्रमशः ६४% व ३९% असा होता. २००१ च्या जनगणनेनुसार हे दर क्रमशः ६६%, ७६% आणि ५४% असे वाढलेले दिसतात. या आकडेवारीच्या विश्लेषणावरून विकासाच्या अनेक बाबी लक्षात येतात. येथे वापरलेल्या साक्षरता दराची व्याख्या अशी आहे :

$$\text{साक्षरता दर} = \frac{\text{७ हून अधिक वय असलेल्या साक्षर व्यक्ती}}{\text{७ हून अधिक वय असलेल्या व्यक्ती}} \times १००,$$

साक्षर व्यक्ती म्हणजे जी कुठल्याही भाषेतील एखादा साधा संदेश वाचू आणि लिहू शकते.

अर्थातच एका बाबीचे सहसा विविध पैलू असल्यामुळे असे अनेक सूचकांक (इंडीकेटर्स) तयार करणे शक्य असते. उदाहरण म्हणून भारतातील विविध नगरांची राहाणीमानाचा दर्जा यादृष्टीने तुलना करायची असल्यास, दर डोई पिण्याच्या पाण्याची उपलब्धता, प्राथमिक शाळांची व आरोग्य केंद्राची सुविधा, गुन्हेगारीचे प्रमाण अशा कित्येक घटकांचे सोयीस्कर असे सूचकांक तयार करून त्यांची तुलना करावी लागेल. प्रत्येक सूचकांकाप्रमाणे बघितल्यास

नगरांच्या क्रमवारीत फरक पडू शकणे साहाजिकच आहे. अशा वेळी सर्व समावेशक असा एक संयुक्त निर्देशांक (इंडेक्स) तयार करावा असा मार्ग आहे, व तो बहुतेक वेळा वापरला जातो. काही वेळा असा निर्देशांक काढणे सुलभ नसते, कारण सगळे घटक समप्रमाणात घेऊन त्यांच्या सूचकांकांची सरासरी वापरणे व्यावहारिकदृष्ट्या बरोबर नसते. म्हणजेच काही घटक जास्त महत्त्वपूर्ण तर काही कमी, असे मानले जाऊ शकते, आणि त्यानुसार निर्देशांक तयार करताना त्यांचे योगदान वेगवेगळे घेता येऊ शकते. हे योगदान किती आहे हे ठरवण्यासाठीसुद्धा उपयुक्त गणिती पद्धती उपलब्ध आहेत. या पद्धतींचे सहसा दोन भाग असतात. पहिल्या भागात सर्व घटकांची तुलना निर्णय घेणाऱ्यांनी एखाद्या प्रमाणित मोजपट्टीद्वारे करायची असते. दुसऱ्या भागात त्या मोजणीच्या तक्त्याधारे प्रत्येक घटकाचे सापेक्ष मूल्य गणिती प्रक्रियांनी काढायचे असते, आणि ते मूल्य निर्देशांक काढण्यासाठी वापरायचे असते. सदर पद्धती पारदर्शक असते आणि घटक तुलनेचे अंक बदलले तर काय फरक पडेल हे सहज समजू शकते. ही प्रक्रिया संगणकाद्वारेदेखील हाताळणे शक्य आहे, विशेषकरून घटकांची संख्या मोठी असल्यास. बारकाईने पाहिल्यास आपल्या आयुष्याशी निगडीत अनके बाबींचे नियंत्रण किंवा निर्देशन बहुढंगी निर्देशांकांनी होत आहे असे आढळते. तरी जागेच्या मर्यादेत आपण काही निर्देशांकांची ओळख करून घेऊ या.

चटई क्षेत्र निर्देशांक

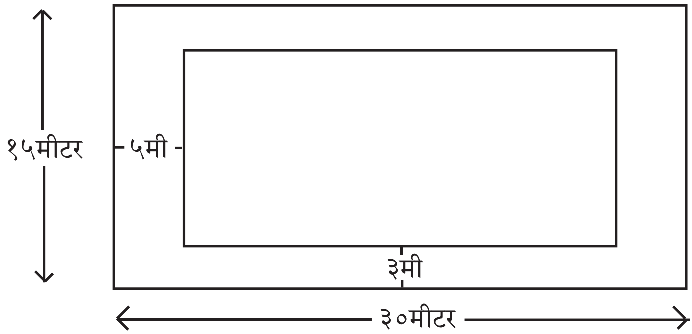
जागेची मर्यादा फक्त या प्रकरणाकरता नसून ती भारतातील बहुतेक सर्व नगरांत सदनिका किंवा गृहनिर्माणासाठी मोठ्या प्रमाणात भेडसावत आहे. त्यामुळे उपलब्ध भूखंडावर गगनचुंबी इमारती बांधणे असे सर्रास सुरू झाले. मात्र, त्यामुळे नगर व्यवस्थापनासाठी विविध प्रकारचे प्रश्न उभे राहू लागले. यावर उपाय म्हणून बांधकामाची मर्यादा ठरवण्यासाठी चटई क्षेत्र निर्देशांक (फ्लोअर स्पेस इंडेक्स (एफएसआय) किंवा फ्लोअर एरिया रेशो (एफएआर)) याचा वापर बहुतकरून सर्व नगरांत अनिवार्य करण्यात आला आहे.

चटई क्षेत्र निर्देशांक हा एकूण बांधकामाची मर्यादा भूखंडाच्या क्षेत्रफळाशी जोडतो. सहसा ह्या निर्देशांकाचे मूल्य **एक** असावे यावर हल्ली भर असतो. म्हणजे एकूण बांधकामाचे क्षेत्रफळ हे भूखंडाच्या क्षेत्रफळाइतकेच असावे. गणिती रूपात,

$$\textit{चटई क्षेत्र}\text{ निर्देशांक} = \frac{\text{एकूण बांधकामाचे क्षेत्रफळ}}{\text{भूखंडाचे क्षेत्रफळ}}$$

म्हणजेच, एकूण बांधकामाचे क्षेत्रफळ = भूखंडाचे क्षेत्रफळ x चटई क्षेत्र निर्देशांक.

आपण याचे एक सोपे उदाहरण बघुया. सोबतच्या आकृतीत दाखवलेल्या आयताकार भूखंडाचे क्षेत्रफळ ३० × १५ = ४५० वर्ग मीटर असे आहे. चटई क्षेत्र निर्देशांक एक मानल्यास एकूण बांधकामाचे क्षेत्र ४५० वर्ग मीटर पर्यंत अनुज्ञेय राहील.



प्रत्यक्षात वाहन चारी बाजूंनी फिरवता येणे, भरपूर उजेड मिळणे, झाडे लावणे अशा अनेक बाबींसाठी भूखंडाच्या आत नियमानुसार काही जागा सोडावी लागते. आपल्या उदाहरणासाठी अशी जागा ५ व ३ मीटरच्या पट्ट्यांनी सोडली असून बांधकाम आतल्या आयताकार भागावर करता येईल, ज्याची लांबी ३० − ५ − ५ = २० मीटर व रूंदी १५ − ३ − ३ = ९ मीटर अशी आहे. याचा अर्थ त्या आतील आयताचे क्षेत्रफळ २० **x** ९ = १८० वर्ग मीटर आहे. तरी एकूण ४५० वर्ग मीटरचे अनुज्ञित बांधकाम या आतील आयतावर खालील एक प्रकारे असे करता येईल :

तळ किंवा पहिला मजला	=	१८० वर्ग मीटर
दुसरा मजला	=	१८० वर्ग मीटर
तिसरा मजला	=	९० वर्ग मीटर
एकूण		४५० वर्ग मीटर

मात्र प्रत्यक्ष बांधकामाची संरचना या मर्यादेच्या तसेच अनुज्ञेय इमारत उंची आणि इतर नियमांच्या अधीन राहून वेगळ्या प्रकारे करणे शक्य आहे. प्रत्येक नगरपालिका आणि नगरपरिषद यासाठी 'विकास नियंत्रण अधिनियम' ठरवते (डेव्हलपमेण्ट कंट्रोल रेग्यूलेशन्स). त्यात आवश्यकतेनुसार बदलही केले जातात. तसेच बांधकामाचे क्षेत्रफळ मोजताना जिने व काही घटक विचारात घ्यायचे किंवा कसे, याबाबत हे अधिनियम मार्गदर्शन करतात. काही विशिष्ट उपयोगांकरता, जसे की शैक्षणिक संस्था व रुग्णालय, चटई क्षेत्र निर्देशांक दोन किंवा त्याहून अधिक देण्याची तरतूद अशा अधिनियमांत असू शकते.

एकूणच आधुनिक नगराचे स्वरूप व बांधकामाला दिशा चटई क्षेत्र निर्देशांक देऊ शकतो असे म्हणणे अतिशयोक्ती ठरू नये. कारण नगराच्या विविध भागातील बांधकामासाठी तेथील विशेष उपयोजन लक्षात घेऊन त्या भागासाठी सरसकट २ किंवा २.५ असा चटई क्षेत्र निर्देशांक देण्यात येऊ शकतो. तसेच 'झोपडपट्टी-वासीयांकरता घरे बांधणे' अशा योजनांकरता वाढीव चटई क्षेत्र निर्देशांक देणे अशा अपवाद बहुधा करण्यात येतो. वास्तुविशारद, भू-वापर नियोजक आणि भू-विकासक यांच्यासाठी चटई क्षेत्र निर्देशांक हा फार जिव्हाळ्याचा विषय आहे हे निश्चित.

अंकीय दरीचे निर्देशांक

गरीब-श्रीमंत, अशिक्षित-सुशिक्षित आणि ग्रामीण-शहरी नागरिक असे बरेच विभाग सर्व समाजात कमी-अधिक प्रमाणात आढळतात. तसेच आंतरराष्ट्रीय स्तरावर विकसित-विकसनशील देश अशी तफावत प्रकर्षाने दिसून येते. यात दोन दशकांपूर्वी आणखीन एका विभागणाऱ्या मितीची भर पडली आहे. तिला 'अंकीय दरी' (डिजिटल डिव्हाइड) असे नाव १९९० च्या दशकात बिल क्लिंटन अमेरिकेचे राष्ट्राध्यक्ष असताना तिथे दिले गेले. आधुनिक अंकीय तंत्रज्ञानावर आधारित माहिती व संप्रेषण (इन्फर्मेशन व कम्यूनिकेशन) प्रणाली जशा की संगणक आणि इंटरनेट यांची सुविधा प्राप्त असणारे व त्या वापरू शकणारे आणि त्या सुविधा उपलब्ध नसणारे यांच्यातील तफावत, ही अंकीय दरीची एक संकल्पना आहे. उदाहरणार्थ, जगातील सुमारे १५% लोक इंटरनेटचा वापर करतात, पण त्यातील ८०% हून अधिक लोक विकसित देशांत राहातात. भारतातील राज्याराज्यात तसेच ग्रामीण-शहरी भागांत सुद्धा ही विषमता प्रकर्षाने आढळते.

साहाजिकच अंकीय दरी कमी करण्यासाठी सगळीकडेच विविध कार्यक्रम हाती घेण्यात येत आहेत. त्याची पहिली पायरी म्हणजे ही दरी किंवा तफावत किती प्रमाणात आहे हे मोजणे. तरी यासाठी समुचित पद्धतीनी निर्देशांक निर्माण केले गेले आहेत, त्यातील काही निवडक निर्देशांक असे आहेत :

अ) दी डिजिटल डिव्हाइड इंडेक्स (डीडीआयएक्स) :– युरोपियन संघाने त्याच्या पंधरा सदस्य देशांतील मागासलेले किंवा अन्य कारणामुळे या प्रगत माहिती व संप्रेषण तंत्रज्ञानाचा वापर करू न शकणारे यांचे वय, लिंग, शैक्षणिक पात्रता आणि आर्थिक उत्पन्न, हे घटक विचारात घेऊन हा निर्देशांक तयार केला आहे. त्या संदर्भात इंटरनेटची सुविधा असणे व वापर, माहिती तंत्रज्ञान हाताळण्याची क्षमता तसेच या तंत्रज्ञानासाठीच्या पायाभूत बाबी यांचा समावेश केला गेला आहे. गेल्या काही वर्षातील या निर्देशांकांची तुलना अंकीय दरी कमी होताना दाखवते, पण वयस्क म्हणजे पन्नाशीच्या पुढील लोकांसाठी ही अजून इतरांच्या तुलनेत अल्प प्रमाणात कमी होताना आढळते. युरोपियन संघाच्या सदस्य देशा–देशात ही दरी चांगल्याच प्रमाणात आहे असेही हा निर्देशांक दाखवतो. त्याआधारे धोरणे व कार्यक्रम राबवण्यात येत आहेत.

ब) इंडेक्स फॉर डिजिटल डिव्हाइड (आयडीडी) :– रिपब्लिक ऑफ कोरिया म्हणजेच दक्षिण कोरियाने त्या देशातील अंकीय दरी भरून काढण्यासाठी शिस्तीने कार्यक्रम सुरू केला आहे. त्याने २००१ मध्ये 'डिजिटल डिव्हाइड' नावाचा एक कायदा संमत करून त्याच्या अंमलबजावणीसाठी एक विशेष संस्था स्थापन केली. तिने २००३ मध्ये अंकीय दरी मोजण्यासाठी इंडेक्स फॉर डिजिटल डिव्हाइड हा निर्देशांक तयार केला आहे. इंटरनेटची सुविधा, संगणक व इंटरनेट वापरण्याची लोकांची क्षमता, आणि त्यांचा प्रत्यक्षात वापर, हे तीन घटक या निर्देशांकाच्या निर्मितीसाठी वापरले जातात. हा निर्देशांक दक्षिण कोरियातील अपंग, कमी उत्पन्न असलेला गट, ग्रामीण भागातील रहिवासी आणि पन्नाशीच्या पुढील वयोगटातील नागरिक यांसाठी वेगवेगळा दाखवला जातो. शासनाचे सातत्याने व व्यावसायिक गंभीरतेने राबवलेले कार्यक्रम आणि त्याला खाजगी क्षेत्र तसेच सामाजिक संस्थांनी दिलेले सकारात्मक सहकार्य यामुळे त्या देशातील अंकीय दरी झपाट्याने कमी होत झाल्याचे सदर निर्देशांक दाखवतो. दक्षिण कोरियातील हे प्रयत्न सर्व देशांसाठी आदर्शवत आहेत.

क) इन्फर्मेशन अँड कम्युनिकेशन टेक्नोलोजि डिफ्यूझन इंडेक्स (आयसीटीडीएक्स) :– संयुक्त राष्ट्र संघ त्याच्या सदस्य देशांतील विकासाची वाटचाल कशी होत आहे याचा सातत्याने मागोवा घेत असतो. त्या अनुषंगाने माहिती तंत्रज्ञानाचा प्रसार व त्या सुविधांची उपलब्धता याचे सूचकांक वापरून 'आयसीटीडीएक्स' हा एक निर्देशांक त्याच्या व्यवसाय व विकास (यूएनडीपी) या विभागाने तयार केला आहे. यासाठी इंटरनेट सुविधांची केंद्रे, संगणक संख्या, टेलिफोन आणि मोबाईल फोन यांची संख्या व जाळी, साक्षरता, राष्ट्रीय उत्पन्न आणि लोकसंख्या यांचा वापर केला गेला आहे. या निर्देशांकाप्रमाणे १८० सदस्य देशांची क्रमवारी लावली जाते. मागील काही वर्षांची ही क्रमवारी बघता भारताचा क्रमांक सहसा १२५च्या पुढे आहे असे दिसते. आपल्याला बराच लांबचा पल्ला गाठायचा आहे हे या निर्देशांकावरून सहज लक्षात येते.

वरील चर्चेवरून लक्षात येईल की अंकीय दरी सर्व प्रकारे दूर करणे हे आर्थिक प्रगतीसाठी व सध्याच्या जागतिक तीव्र स्पर्धेत टिकून राहाण्यासाठी प्रत्येक समाज आणि देशाला अनिवार्य ठरत आहे. त्या संबंधीचे निर्देशांक त्यामुळे महत्त्वपूर्ण दिग्दर्शन देतात. मात्र ते निर्देशांक प्रामुख्याने नवीन तंत्रज्ञान उपलब्धतेची माहिती देतात; पण ज्ञानाच्या दरीबद्दल फारसे सांगू शकत नाहीत. आगामी ज्ञानाधारित समाजात ही नवीन दरी पण आपल्याला ओलांडणे आवश्यक ठरणार आहे याची नोंद घेतली पाहिजे.

वाहनतळांच्या संरचनेसाठी निर्देशांक

सार्वजनिक वाहनतळे जसे की बस आणि रेल्वे स्थानके, विमानतळ आदींच्या वास्तु वाढणारी प्रवासी व इतर लोकांची संख्या आणि कामाचा व्याप लक्षात घेऊन प्रचंड बहुमजली तसेच बराच विस्तार असलेली सर्वदूर आढळतात. अशा वास्तूंचे अंतर्गत आणि बाह्य संरचना आणि बांधकाम हे एक मोठे आव्हान रचनाकारांसाठी असते. प्रवासी गोंधळू नये म्हणून त्याच्या दृष्टिक्षेपात जास्तीत जास्त सुविधा व सेवा केंद्रे यावीत, पण त्याच बरोबर अशी केंद्रे जवळ जवळ असल्यास गर्दी ची समस्या उद्‌भवू नये असे उद्देश पण असते. या दोन्ही बाबींचे संतुलन साधण्यासाठी अनेक प्रकारांनी संरचना करणे शक्य असते. कुठली रचना इष्टतम ठरू शकते व तिचे मूल्यमापन करणे यासाठी काही गणिती निर्देशांक मार्गदर्शन करू शकतात. त्यामुळे आकर्षक पण त्याच

बरोबर उत्तम कार्यक्षमतेचे वाहनतळ उभारण्यास मदत मिळते. यासाठी प्रामुख्याने खालील तीन निर्देशांक महत्त्वाचे आहेत :

१) दृष्टिगोचरता (व्हिजिबिलिटी) निर्देशांक – संपूर्ण इमारतीतील प्रवासी सुविधा व सेवा पुरवणारी केंद्रे या साठी प्रथम निश्चित केली जातात, जशी की प्रवेशद्वार, तिकीटाची खिडकी, वेळापत्रक फलक, घड्याळ इत्यादी. अशा प्रत्येक केंद्रापासून उर्वरित सर्व केंद्रे सरळ दृष्टिक्षेपात किंवा चिन्हे व सूचना फलकावरून ती कुठे आहेत हे समजते की नाही, याची नोंद केली जाते. समजा अशी एकूण पंधरा केंद्रे विचारात घेतली तर १५ × १५ चा एक तक्ता 'हो' किंवा 'नाही' या उत्तरांनी म्हणजेच क्रमशः १ किंवा ० या अंकानी सहज तयार करता येतो. त्यावर गणितातील ग्राफ थेयरी व मॅट्रिक्स बीजगणितातील संकल्पना आणि सूत्रे वापरून संपूर्ण इमारतीचा किंवा निवडक सेवाकेंद्रांचा दृष्टिगोचरता निर्देशांक ० ते १०० या मधील अंकात मांडता येतो. हा निर्देशांक पूर्ण वाहनतळासाठी ७० ते ८० मध्ये असावा असा एक संकेत आहे. त्यापेक्षा मोठा निर्देशांक गर्दी होण्याची शक्यता दाखवतो.

२) विकेंद्रीकरण (डीसेन्ट्रलायझेशन) निर्देशांक :– वाढता व्याप बघून विविध प्रक्रीया व त्यानुसार त्यांच्या केंद्राची स्थाने एकमेकापासून दूर असणे हे व्यवस्थापनासाठी सोयीचे असते. म्हणजेच कामाचे विकेंद्रीकरण करण्यावर भर दिला जातो. वाहनतळावरील अशा विखुरलेल्या बाह्य गोष्टींची मोजणी करण्यासाठी काही गणिती पद्धती वापरून विकेंद्रीकरण निर्देशांक तयार करता येतो.

३) आटोपशीरता (कॉम्पॅक्टनेस) निर्देशांक :– जागेची मर्यादा, संदेशांची त्वरित देवघेव अशा अनेक व्यावहारिक बाबी लक्षात घेऊन संरचना करणे इष्ट असते. वाहनतळाचे सेवाकेंद्राचे क्षेत्रफळ, परिमिती आणि संलग्न वास्तूंचे आकार लक्षात घेऊन हा आटोपशीरता निर्देशांक गणिती सूत्रांनी काढता येतो.

हे तिन्ही निर्देशांक काढण्यासाठी संगणकाचा वापर करणे शक्य आहे, विशेषतः मोठ्या व क्लिष्ट संरचना असलेल्या वाहनतळांसाठी. खरे पाहिले तर, हे निर्देशांक पहिल्यापासून वापरणे योग्य ठरते. म्हणजेच अगदी वाहनतळाचा आराखडा बनवण्यापासून. मान्य झालेल्या आराखड्यासाठीचे हे निर्देशांक काढून ठेवावेत. मग बांधकाम पूर्ण होऊन वर्दळ सुरू झाल्यावर प्रत्यक्ष सर्वेक्षण

करून त्यांचे मूल्य तपासावे आणि त्यानंतर प्रवासी व सेवा यांचा ओघ खूप गतिमान झाल्यावर परत सर्वेक्षण करून त्या निर्देशांकांचे मूल्य फेर तपासावे. सहसा त्यांचे मूल्य पहिल्या मूल्यांपेक्षा कमी होताना आढळते, कारण आराखड्यावरून मोजणी करताना कुठलाही रहदारीचा अडथळा येत नाही. या प्रक्रियेमुळे कुठे व कशी सुधारणा करावी याचे अचूक व योग्य मार्गदर्शन मिळते.

जगातील अनेक प्रमुख आंतरराष्ट्रीय विमानतळांचे असे निर्देशांक काढण्यात आले आहेत. त्यांचा वापर नवीन आंतरराष्ट्रीय विमानतळांच्या संरचनेसाठी फार उपयोगी ठरतो. आपल्या देशातील काही बस व रेल्वे स्थानकांचा दृष्टिगोचरता निर्देशांक काढून त्याच्या आधारे प्रवाश्यांसाठी उपयुक्त मार्गदर्शन करणारे बदल त्या स्थानकांना सुचवले गेले होते आणि ते बहुतांश आमलात आणले गेले आहेत हे विशेष. असे अभ्यास सर्व सार्वजनिक स्थळे, जिथे मोठ्या प्रमाणात लोकांची ये-जा असते, यांसाठी केल्यास योग्य बदल शास्त्रीय पद्धतीने करणे शक्य होईल. अशा प्रकारचे निर्देशांक तयार करणे हा मानवाभिमुखतेचे शास्त्र (ह्युमन ओरिएन्टेशन सायन्स) याचा अविभाज्य भाग आहे, ज्यामुळे मनुष्याला कुठल्याही मोठ्या वास्तूत वावरताना तसेच रोजच्या वस्तू वापरताना देखील गोंधळ आणि अनिश्चिततेस सामोरे जावे लागू नये.

मोलाची भूमिका

वरील नमुना दाखल निर्देशांकावरून कल्पना येते की जवळपास सर्व क्षेत्रात निर्देशांक मोलाची भूमिका बजावत आहेत. शेयर बाजारातील चढ-उतार दाखवणारा *सेन्सेक्स*, पदार्थाचा प्रकाश *वक्रीभवनाचा (रिफ्रॅक्शन)* निर्देशांक, लेखनाची स्पष्टता-अस्पष्टता दाखवणारा *धूसरता (फॉग)* निर्देशांक, असे अनेकविध निर्देशांक आपल्या आयुष्यातील विविध बाबींशी संबंधित आहेत. देशातील सर्व प्रकारच्या औद्योगिक उत्पादनांचा निर्देशांक तसेच औद्योगिक कामगार, नागरी इतर कामगार आणि ग्रामीण भागातील कामगार यांचे वेगवेगळे *उपभोक्ता मूल्य (कंझ्यूमर प्राइस)* निर्देशांक भारतीय रिझर्व्ह बँक दरमहा प्रसिद्ध करते (पहा : www.rbi.org.in). हे आकडे अनेक प्रकारे वापरले जातात. आंतरराष्ट्रीय स्तरावर *मानव विकास (ह्युमन डेव्हलपमेण्ट)* निर्देशांक हा शून्य आणि एक या अंकादरम्यान देशांतील लोकांचे आयुष्यमान, शालेय शिक्षणाची स्थिती आणि दरडोई ढोबळ उत्पन्न ह्या घटकांवरून स्थिती दाखवतो. असे

बरेच निर्देशांक जागतिक पातळीवर नियमितपणे प्रसिद्ध केले जातात, त्यामुळे प्रत्येक देशाच्या परिस्थिती व प्रगतीचे व्यापक चित्र मिळते.

निर्देशांक काही वेळा टक्केवारीने तर काही वेळ केवळ अंकानी दाखवले जातात. या संदर्भात अनेकदा गुणक संख्या (कोएफिशन्ट) हीचा वापर होतो. उदाहरणार्थ, अर्थशास्त्रात वापरला जाणारा *गिनी कोएफिशन्ट*, ज्याचे मूल्य ० ते १ च्या दरम्यान असते. शून्य म्हणजे पूर्ण समता, तर एकचा अर्थ पूर्ण विषमता असा असतो. समतेकडे वाटचाल कशा प्रकारे चालू आहे ह्याचा आढावा घेण्यास त्यामुळे ठोस मदत मिळते. तरी संशोधकांनी त्यांच्या संशोधनात आकडेवारीचे विश्लेषण करून शक्य तो काही नवीन निर्देशांक तयार करण्यावर भर द्यावा असे सुचवण्यात येते. अंक आणि गणिताची ही किमया आपल्यासाठी महत्त्वपूर्ण ठरत आहे ही बाब समाधानाची आहे.

⌘⌘⌘

७

आधार गणिताचा

गणित हा विषय अनेकजणांना केवळ आकडेमोड, आकृत्यांचा खेळ आणि काही विचित्र चिन्हांची विशेष नियमांनी आणि सूत्रांनी केलेली कसरत अशी वाटते. आर्थिक व्यवहाराशिवाय दैनंदिन आयुष्यात गणिताचा भरपूर उपयोग होतो हे बरेचदा जाणवतदेखील नाही. गणित हा रूक्ष विषय असून त्याचा वापर करण्याच्या आणि त्यात कारकीर्दीच्या फारशा संधी उपलब्ध नाही असा ही एक समज आहे. काही जणांना गणित हा विषय केवळ चांगले गुण मिळवून एकूण टक्केवारी वाढवण्याचे एक साधन असे वाटते. तर काहींना गणिताचा बागुलबुवा वाटतो.

गणिताबाबत फारशी आस्था नसणारे वरील चित्र गणिताच्या आवाक्याची पुरेशी माहिती नसणे किंवा काही शैक्षणिक अप्रिय अनुभव तसेच त्याच्या काहीशा किचकट मांडणीमुळे होते. मात्र हे संपूर्ण चित्र नसून गणिताचे असंख्य पदर आणि नानाविध उपयोजन याबाबत अनभिज्ञता असल्याने झालेले आहे. गणिताच्या विविध संकल्पना, अगदी साध्या त्रिभुज व वर्तुळापासून ते अतिप्रगत व अमूर्त अशा हिल्बर्ट स्पेस व बनाक स्पेस यांचा आपल्या रोजच्या आयुष्याशी अगदी जवळचा संबंध आहे हे सांगितल्यास अनेकांचा विश्वास बसणार नाही. भारतात २०१२ हे राष्ट्रीय गणित वर्ष म्हणून साजरे करण्याचा मुख्य हेतू गणिताची व्यापकता, उपयोगिता आणि त्यात रस निर्माण करणे असा ठेवला गेला. तसेच गणितविज्ञान व त्याच्या काही प्रमुख शाखांत स्नातक व स्नातोकत्तर पदवी आणि प्रावीण्य मिळवल्यास नोकरीचे अनेक मार्ग उपलब्ध आहेत हे समोर आणणे असे ही होते. म्हणूनच आपण गणिताचा आधार कसा घेतला जातो हे बघुया.

भ्रमणध्वनिचा पाया

हल्ली बहुतांश व्यक्ती अनेक कारणांमुळे भ्रमणध्वनि म्हणजेच मोबाइल फोन वापरतात. त्याचे मूळ तांत्रिकी नाव सेल्युलर फोन (थोडक्यात सेल फोन) असे आहे. ही सेल फोन संचालन व्यवस्था गणितातील (भूमितीतील) षटकोन या आकृतीच्या आधारे आखलेली असते, ह्याची कल्पना बहुतेकांना नाही. सेल फोन हे विशिष्ट ध्वनि लहरीवरच (फ्रीक्वेन्सिवरच) चालवण्याची मुभा सरकार देते. कारण ध्वनि लहरीचा असैनिकी वापरासाठीचा वर्णपट (स्पेक्ट्रम) मर्यादित आहे, आणि बरेच सेवा पुरवठादार त्याची मागणी करत असतात. त्यामुळे त्यांना मोठ्या प्रमाणात शुल्क भरून देखील अगदी मर्यादित ध्वनि लहरीचा पट्टा किंवा अंतराळ वापरण्यास दिला जातो. साहजिक त्या ध्वनि लहरींचा जास्तीत जास्त उपयोग करून घेणे त्यांच्यासाठी अत्यंत महत्त्वाचे असते. सेल फोन व्यवस्थेचा गाभा खाली दिला आहे.

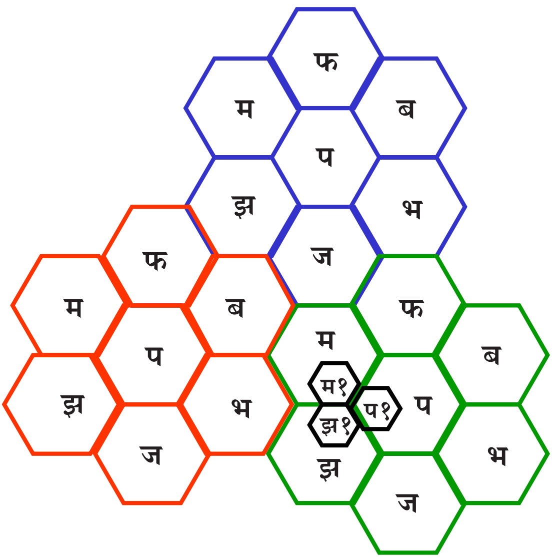
षटकोनी आकार

प्रत्येक सेल फोन कंपनी यासाठी तिच्या सेवा-क्षेत्राला वेगवेगळ्या भागात विभागून उपलब्ध मर्यादित ध्वनि लहरी एकाच वेळेस भिन्नभिन्न भागात वापरते. असे विभाग अनेक प्रकारे करता येऊ शकतात. तथापि असे विभाग किंवा सेल षटकोनी असल्यास कमाल वापर मिळतो असे षटकोनाचे गणिती गुणधर्म सिद्ध करतात. महत्वाचे म्हणजे अशा आकाराच्या सेल समूह आतील क्षेत्रफळाला कार्यक्षम पद्धतीने वापरतो. म्हणूनच मधमाश्यांचे पोळे आतील बाजूस षटकोनी सेलस् मध्ये विभागलेले असत. त्या अनुषंगाने प्रत्येक कंपनी तिच्या सोई प्रमाणे सेवा-क्षेत्राला विविध परिमाण असलेल्या षटकोनी सेलस् मध्ये विभागते. ही सर्व सेल निर्मितीची प्रक्रिया सेवा-क्षेत्राच्या नकाशावर केली जाते, न की प्रत्यक्ष जमिनीवर. या संदर्भात आकृति १ पहावी.



आकृती १

आकृती १ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे प्रत्येक सेल मध्ये एक बेस स्टेशन (बीएस) उभारले जाते, जे आपण कित्येक इमारतींच्या वर पाहिले असेल. तसेच एक मास्टर स्टेशन (एमएस) हे एक फिरणाऱ्या वाहनाच्या रूपात असते आणि एक मोबाइल स्विचिंग सेंटर (एमएससी) म्हणजेच एक्सचेंज सेंटर सेवा क्षेत्रात कुठेही असू शकते. ते जवळच्या दूरध्वनि (पीएसटीएन) केंद्राच्या संपर्कात असते. या सेलची रूंदी सेवा वापर मागणीनुसार ठरवली जाते. ही रूंदी १०० मीटर ते ३० किलोमीटर अशी असू शकते. काही वेळा दाट वस्तीत एका सेल मध्ये उप-सेल (परत षटकोनी) असू शकतात. त्यासाठी आकृती २ पहावी.



आकृती २

आकृती २ मध्ये दाखवल्या प्रमाणे प्रत्येक समूहात ७ सेलस् असून तेच नाव असलेल्या (प, फ, ब, भ, ज, झ, म) प्रत्येक सेल मध्ये तीच ध्वनिलहर वापरता येते. जेव्हा तुम्ही प्रवास करत असता तेव्हा तुमचा फोन त्या सेलमधील ध्वनिलहरीवर आणि तेथील बेस स्टेशनची सेवा घेत असतो. तुम्ही पुढे दुसऱ्या सेलमध्ये गेल्यावर तेथील वेगळी ध्वनिलहरी व बेस स्टेशन तुम्हाला सेवा देऊ लागते. तसेच तुम्ही ज्याच्याशी बोलत आहात ती व्यक्ती जर प्रवास करत

असेल तर तिला वेगवेगळ्या सेलस् मधील ध्वनिलहरी आणि बेस स्टेशनस् अशाच प्रकारे सेवा देत असतात. तुम्ही दुसऱ्या सेलमध्ये गेल्यावर मागील सेल तुम्ही सोडलेली ध्वनिलहर दुसऱ्या सेल फोन धारकास उपलब्ध करून देते. ही सर्व प्रक्रिया (एमएस व एमसीएस) संचालित करतात आणि काही समस्या आल्यास तुमच्या जवळच्या दुसऱ्या बेस स्टेशन कडून तुम्हाला सेवा देतात. तुम्हाला मात्र या सर्व प्रक्रियेची कल्पनाही नसते. एका सेलमध्ये एकाच वेळी प्रचंड संख्येत सेल फोन ग्राहकांनी मागणी केल्यास मात्र आपल्याला सेवा उपलब्ध नाही असा संदेश त्यामुळे काही वेळा मिळू शकतो.

ह्या संपूर्ण यंत्रणेत षटकोनी सेल हा आकार आणि त्याची परिमाणे तसेच ध्वनिलहरी प्रक्षेपणाचे गणित फार मोलाची भूमिका पार पाडतात. तरी काही वेळा अप्रत्यक्ष, सूक्ष्म किंवा थेट रितीने गणित आपल्या विविध कृतिंशी जवळीक साधून आहे हे महत्त्वाचे. अगदी अलीकडचे उदाहरण म्हणजे सरकारने सुरू केलेली 'आधार' योजना ही गणिती अंकाचाच आधार घेते हे विशेष.

गणिताची अशी लक्षणीय रूपे आणि उपयोजिता यांची आपण या पुस्तकात भेट घेत राहू.

⌘⌘⌘

८

पिकचे प्रमेय : एक प्रबळ साधन

अंकगणिताचा अगदी सुरवातीचा सार्वजनिक क्षेत्रातील उपयोग म्हणजे भूमापन करून त्या क्षेत्रफळाचा वापर विविध प्रशासकीय कामासाठी केला जात होता, असे अनेक ऐतिहासिक कागदपत्रात आढळते. त्यासाठी खास लोकांची निवड करून त्यांना विशिष्ट गणिती प्रक्रिया आणि पद्धतींचे प्रशिक्षण दिले जात असे. प्राचीन काळातील गणितज्ञ, उदाहरणार्थ आर्किमिडीजने काही वस्तूंचे क्षेत्रफळ व घनफळ काढण्यासाठी सूत्रे निर्माण करण्यात आपली हयात घालवली असे ही दिसून येते. आजसुद्धा शालेय शिक्षणातील गणिताच्या प्राथमिक पाठ्यक्रमात वेगवेगळ्या भूमिती आकृत्यांचे क्षेत्रफळ काढणे हे महत्त्वाचे मानले जाते.

सहसा शालेय पाठ्यक्रमात त्रिभूज, चौरस, आयत, षटकोन आदी आकृती काढणे व त्यांनी बंदिस्त केलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ काढण्याची सूत्रे शिकवली जातात आणि ती वापरण्याचा सराव करून घेतला जातो. बारकाईने पाहिल्यास लक्षात येईल की त्या सर्व आकृत्या बहिर्गोल (कॉन्व्हेक्स) अशा असतात. म्हणजे त्या आकृतीमधील कुठल्या ही दोन बिंदूंना जोडणारी सरळ रेषा पूर्णपणे त्या आकृतीमध्येच समाविष्ट असते. मात्र, प्रत्यक्ष उपयोगात अनेक वेळा बहुभुजा आकृती अन्तर्गोल (काँकेव्ह) या प्रकारच्या असतात. त्यांचे क्षेत्रफळ काढणे हे एक आव्हान असते कारण त्यासाठी सूत्रे सामान्यपणे उपलब्ध नसतात.

पिकची शोकांतिका

या संदर्भात जी. ए. पिक (१८५९–१९४२) यांनी १८९९ साली प्रसिद्ध केलेले प्रमेय फार उल्लेखनीय आहे. त्याला 'पिकचे प्रमेय' (पिक्स् थेरम) म्हटले

जाते. पिक हा ऑस्ट्रियन गणितज्ञ होता व त्याने ए. आइनस्टाइनयांना गणितातील काही प्रमुख निष्कर्षांची ओळख करून दिली होती, ज्याचा वापर आइनस्टाइनननी पुढे साधारण सापेक्षता सिद्धांत (जनरल थेयरी ऑफ रिलेटीव्हीटी) विकसित करण्यासाठी केला. १९३८ साली नाझी सैन्याने ऑस्ट्रिया देश पादाक्रांत केल्यामुळे धर्माने ज्यू असलेल्या पिकनी प्राग, चेकोस्लोव्हाकियाला पलायन केले. त्यांच्या दुर्दैवाने, नाझी सैन्येने तो देश ही लवकरच व्यापला आणि पिक यांची पकड करून थेरेसिंस्टेड येथील यातना तळात (कॉन्सेन्ट्रेशन कँप) त्यांची रवानगी केली. तेथे त्यांचा १९४२ मध्ये इतर निरपराध लोकाप्रमाणे शोचनीय मृत्यू झाला.

पिकचे प्रमेय

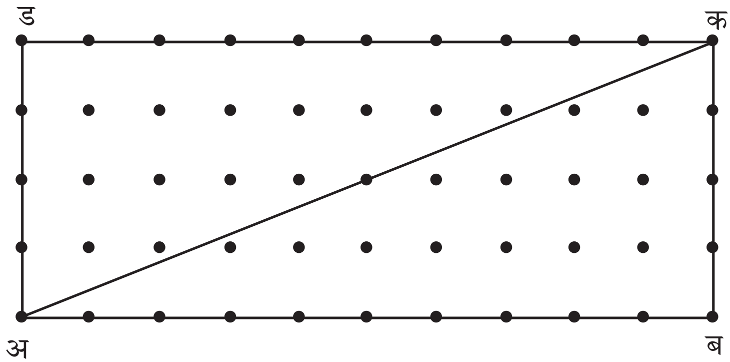
पिकचे प्रमेय फारच साधे आणि सुरेख आहे, पण त्याचबरोबर खूप उपयोगी आहे. ते असे सांगते की कुठलीही बहुभुजा आकृती (अन्तर्गोल किंवा बहिर्गोल) सम-अंतर असलेल्या बिंदूच्या चौकटीवर काढा जेणे करून बहुभुजा आकृतीचे शिरोबिंदू आणि चौकटीचे बिंदू मेळ खातील. त्या बहुभुज आकृतीतील समजा अ इतके बिंदू चौकटीच्या आतील छेद बिंदूने दाखवले असतील आणि स इतके सीमा रेषेवरील बिंदू चौकटीच्या छेद बिंदूनी दाखवले असतील, तर त्या बहुभुजा आकृतीचे क्षेत्रफळ क्ष (वर्ग एकलात) असे असेल :

$$क्ष = अ + (स/२) - १$$

हे सूत्र अर्थातच बहुभजा आकृतीत भोक असल्यास वापरता येणार नाही. त्यासाठी सुधारित सूत्र वापरावे लागते. या प्रमेयाची सिद्धता विगमन (इंडक्शन) पद्धती तसेच काही अन्य पद्धतींनी देता येते. गणिताच्या दृष्टीने आश्चर्य करण्यासारखी बाब म्हणजे या सूत्रात कुठलाही थेट गुणाकार (उदा. लांबी × रुंदी) नसताना देखील वर्ग एकलात क्षेत्रफळाचे मूल्य प्राप्त होते.

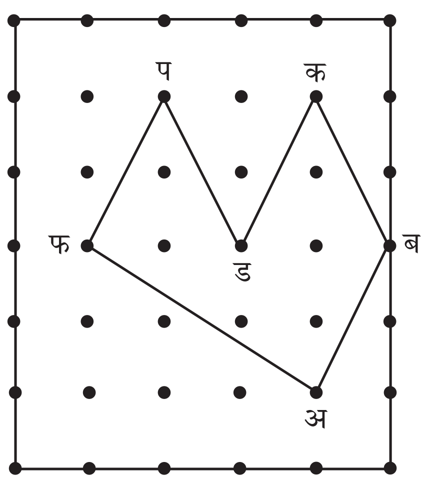
आपण हे सूत्र बरोबर आहे का याची तपासणी आकृती १ ने करू या. आकृती १ मध्ये एक सेमी अशा अंतराच्या बिंदूंची चौकट घेतली आहे. त्यामध्ये एक कर्ण आखून दोन त्रिभुज निर्माण केले आहेत. त्यापैकी एका त्रिभुजाच्या पायाची लांबी १० सेमी व ऊंची ४ सेमी इतकी भरते. तरी त्रिभुजाचे क्षेत्रफळाचे सूत्र (१/२ × पाया × ऊंची) वापरल्यास २० वर्ग

सेमी. असे उत्तर मिळते. आता आपण पिकचे प्रमेय वापरू. आकृती १ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे अबक त्रिभुजाच्या आतमधील चौकटीतील छेद बिंदूंची संख्या, अ = १३ आणि त्रिभुजाच्या सीमारेषेवर चौकटीतील छेद बिंदूंची संख्या, स = १६ अशी आहे. तरी पिकच्या प्रमेयाप्रमाणे त्या त्रिभुजाचे क्षेत्रफळ क्ष = १३ + (१६/२) – १ = २० वर्ग सेमी असेच मिळते.



आकृती १

आता आपण पिकच्या प्रमेयाचा वापर अन्तर्गोल अशा आकृती २ मध्ये दाखवलेल्या बहुभुजाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी करू.



आकृती २

आकृती २ मध्ये अन्तर्गोल अबकडपफ बहुभुजा आकृतीच्या आतील चौकट छेद बिंदूंची संख्या अ = ६ आणि सीमारेषेवरील चौकट छेद बिंदूंची संख्या स = ६ अशी आहे. तरी पिकच्या प्रमेयानुसार आकृती २ मधील बहुभुजा आकृतीचे क्षेत्रफळ क्ष = ६ + (६/२) – १ = ८ वर्ग सेमी असे येते.

विस्तार व उपयोग

मात्र त्रिमितीतील बहुभुजा वस्तूचे (पॉलिटोप) घनफळ काढण्यासाठी पिकच्या प्रमेयाची म्हणजेच सूत्राची विस्तारित आवृत्ती वापरणे शक्य नाही असे सिद्ध झाले आहे. तथापि त्यापेक्षा अधिक मितीत या सूत्राचे विस्तारित रूप वापरणे शक्य आहे असे प्रगत गणित दाखवते. या प्रमेयावर आज देखील बरेच संशोधन चालू आहे. त्यात संगणकाचा उपयोग भरपूर केला जात आहे हे विशेष. एका प्रकारे पिकचे प्रमेय युक्लिडची पारंपारीक भूमिती आणि आधुनिक अंकीय (डिजिटल) भूमिती यांना जोडणारा एक दुवा मानला जातो. वरवर साधे दिसणारे गणिती निष्कर्ष संशोधनाची मोठी दालने उघडण्यास मदत करतात हे पिकचे प्रमेय परत एकदा नजरेस आणते.

⌘⌘⌘

९

त्रिभुजाची बहु-उपयोगिता

प्रतल भूपृष्ठासाठी युक्लिडच्या भूमितीमधील त्रिभुज ही आकृती गणिताच्या अनेक महत्त्वपूर्ण मूलभूत बाबी आणि उपयोजनांशी संबंधित आहे. त्याचे अनंत प्रकार तसेच विशिष्ट गुणधर्म यामुळे प्राथमिक प्रमेये ते मनोरंजनात्मक गणित ते अगदी प्रगत गणिताच्या सिद्धांतात त्रिभुजाचा वापर होतो. या संदर्भात आपण तीन उदाहरणे नमुना म्हणून बघुया.

उदाहरणे

उदाहरण १ : सुप्रसिद्ध गणितज्ञ एल. ऑयलर (१७०७-१७८३) ने सी. गोल्डबॅक (१६९०-१७६४) या गणितज्ञाला १७५१ मध्ये एक पत्रात असा प्रश्न उपस्थित केला की प्रतलावर एक बहिर्गोल (काँव्हेक्स) 'न' भुजा असलेली अशी बहुभुजाकृती घेतली, तर तिचे एकमेकांस छेद न देणारे विकर्ण आखून किती प्रकारे त्रिभुजामध्ये विभाजन करता येईल ?

या प्रश्नाचे उत्तर ऑयलरने एका सूत्रात पुढे मांडले. मात्र त्याची सिद्धता दाखवण्यासाठी ऑयलरला विगमन (इंडक्शन) पद्धतीचा मोठ्या प्रमाणात व काहीशा किचकट रितीने वापर करणे भाग पडले. ऑयलरचे ते सूत्र असे आहेः

$$अ_{न} = \frac{२ \times ६ \times १० \times \ldots\ldots\ldots \times (४न-१०)}{(न-१)!}$$

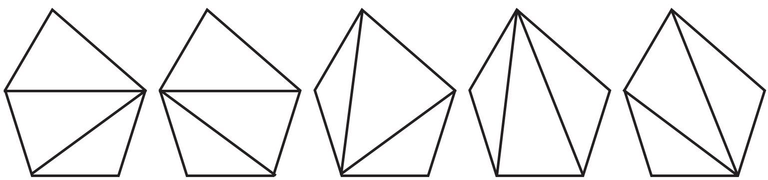
इथे $अ_{न}$ म्हणजे वरीलप्रमाणे त्रिभुज निर्मिती प्रकारांची एकूण संख्या, न म्हणजे बहुभुजाकृतीच्या एकूण भुजा, आणि

न! = न × (न−१) × (न−२) ×...... × ३ × २ × १ असे आहे.

उदाहरणार्थ, $अ_{४}$ = २ कारण चार भुजा असलेल्या आकृतीचे (चौरस, आयत इत्यादी) विकर्णांनी दोन वेगवेगळ्या प्रकारातील त्रिभुजात विभाजन होऊ शकते. पाच भुजा असलेली आकृती घेतल्यास वरील सूत्राप्रमाणे,

$$अ_{५} = \frac{२ \times ६ \times १०}{४ \times ३ \times २ \times १}$$ = ५ प्रकारे त्रिभुज निर्माण करता येतील.

ते विभाजन प्रकार कसे असतील हे आकृती १ मध्ये (अ) ते (ग) प्रकारानी दाखवले आहे.



(अ) (ब) (क) (ड) (ग)

आकृती १

'न'चे मूल्य वाढत गेल्यास $अ_{न}$ चे मूल्य प्रचंड प्रमाणात वाढते असे या सूत्रावरून लक्षात येईल. उदाहरणार्थ, अष्टभुजाकृतीचे $अ_{८}$ = १३२ तर नऊ भजाकृतीचे $अ_{९}$ = ४२९ या संख्येत विकर्णांनी त्रिभुजात त्यांचे विभाजन प्रकार होतील. अर्थातच असे सर्व त्रिभुज प्रत्यक्षात काढुन बघणे क्लिष्ट आहे, पण संगणकाद्वारे असे करता येईल.

जर्मन गणितज्ञ जे. ए. सेग्नर (१७०१–१७७७) ने १७५८ मध्ये $अ_{न}$ चे मूल्य काढण्याचे एक पुनरावृत्ती सूत्र विकसित केले जे असे आहे,

$$अ_{न} = अ_{२} \times अ_{न-१} + अ_{३} \times अ_{न-२} \times \cdots\cdots \times अ_{न-१} \times अ_{२}$$

(इथे $अ_{२}$ = $अ_{३}$ = १ असे मानावे).

एक महत्त्वपूर्ण गणिती बाब म्हणजे $अ_{न}$ ही संख्या कॅटलान अंकांशी (क) पुढील सूत्राने जोडलेली आहे :

$अ_{न} = क_{न-१}$. इ. सी. कॅटलान (१८१४-१८९४) या फ्रेंच गणितज्ञाने असे अंक खालील सूत्राने तयार केले :

$$क_{न} = \sum_{प=०}^{न-१} \left[क_{प} \times क_{न-प-१}\right],$$

जेव्हा $क_{०} = क_{१} = १$ असे मानले असते. कॅटलान अंक किंवा संख्यांचा प्रगत बीजगणितात मोठ्या प्रमाणात उपयोग होतो. भूमिती व बीजगणिताचा असा संबंध बहुपयोगी आहे. पहिले १० कॅटलान अंक : १, १, २, ५, १४, ४२, १३२, ४२९, १४३० व ४८६२ असे आहेत.

उदाहरण २ : कुठल्याही समबाहु त्रिभुजातील अंतर्भागात एक बिंदू घेतला आणि त्यापासून त्रिभुजाच्या तीन भुजांवर लंब टाकले, तर त्या तिन्ही लंबाच्या लांबीची बेरीज ही त्या समबाहु त्रिभुजाच्या उंची इतकी असते.

इटालियन गणितज्ञ व्ही. विविआनी (१६२२-१७०३) याने हे प्रमेय मांडले म्हणून त्याला विविआनीचे प्रमेय म्हटले जाते. विविआनीच्या गणिती प्रतिभेला ओळखून गेलिलिओने त्याला आपला सहसंशोधक म्हणून आपल्या घरी ठेऊन घेतले होते. त्याने युक्लिडचे 'एलिमेण्टस' हे पुस्तक इटालियन भाषेत अनुवादित करून १६९० मध्ये प्रसिद्ध केले होते. त्याने गेलिलिओचे चरित्रही लिहिले, पण गेलिलिओचे संपूर्ण वैज्ञानिक कार्य प्रसिद्ध करण्याचे त्याचे प्रयत्न चर्चने प्रतिबंध घातल्यामुळे तडीस जाऊ शकले नाहीत. एकाप्रकारे विज्ञान प्रसाराला त्यामुळे खीळ बसली.

सदर प्रमेयाची सिद्धता अतिशय सोपी आहे व विविधप्रकारे ती मांडली गेली आहे. आपण याकरता अबक हा एक समभुजा त्रिभुज घेऊ व त्यातील प ह्या एका आतील बिंदूपासून पफ, पभ आणि पम असे लंब आखू (आकृती २). आता आपण पअ, पब आणि पक अशा रेखा (तुटकपणे दाखवलेल्या) जोडू. त्रिभुजाचे क्षेत्रफळ हे $^{१}/_{२}$ × पाया × उंची या सूत्राने काढता येते. तरी,

$\triangle$ अपब चे क्षेत्रफळ = $^{१}/_{२}$ × अब × पफ

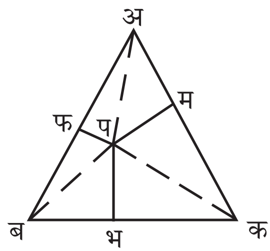
$\triangle$ अपक चे क्षेत्रफळ = $^{१}/_{२}$ × अक × पम

$\triangle$ बपक चे क्षेत्रफळ = $^{१}/_{२}$ × बक × पभ

या तिघांची बेरीज केल्यास,

($\triangle$अपब + $\triangle$अपक + $\triangle$बपक) चे क्षेत्रफळ

$$= \frac{१}{२}(\text{अब} + \text{पफ} + \text{अक} \times \text{पम} + \text{बक} \times \text{पभ})$$



आकृती २

किंवा $\triangle$ अबक चे क्षेत्रफळ $= \frac{१}{२} \times \text{बक} \times (\text{पफ} + \text{पभ} + \text{पम})$

(कारण अबक हा समभुजा त्रिभुज आहे)

किंवा $\frac{१}{२} \times \text{बक} \times \text{उंची} \quad = \quad \frac{१}{२} \times \text{बक} \times (\text{पफ} + \text{पभ} + \text{पम})$

म्हणजे त्रिभुजाची उंची = पफ + पभ + पम.

हे प्रमेय बहुभुजा आकृतीसाठीसुद्धा सिद्ध केले गेले आहे, तसेच त्रिमितीतील आकृत्या आणि गोल पृष्ट व अपास्त (हायपरबोला) पृष्टावरील भूमितीतील आकृत्यांसाठी सिद्ध करणे शक्य आहे. या प्रमेयावर आधारित अनेक गणिती मंनोरंजक प्रश्न तयार केले गेले असून तसे बरेच साहित्य उपलब्ध आहे.

विद्यार्थ्यांना भूमितीची विविध अंगाने ओळख करून देण्यास विविअनचे हे प्रमेय फार उपयोगी ठरते असा अनुभव आहे.

एकूणच या प्रमेयाची उपयोजिता आणि विस्तारिता संशोधकांना अनेक प्रकारे मदत करते.

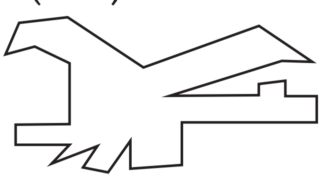
उदाहरण ३ : ऑगस्ट १९७३ मध्ये व्ही. क्लीन याने एका गणित परिषदेत असे विचारले की कलादालनाच्या एका मजल्यावरील विविध खोल्यात प्रदर्शित

केलेल्या बहुमूल्य वस्तुंवर नजर ठेवण्यासाठी कमीत कमी किती संरक्षक उभे असले पाहिजेत? खोल्या नागमोडी किंवा इतर प्रकारे विखुरलेल्या असू शकतात.

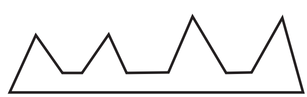
व्ही. श्वाताल या चेकोस्लाव्हाकियन गणितज्ञाने त्यानंतर लवकरच या प्रश्नाचे उत्तर एका गणिती प्रमेयाद्वारे शोधून सिद्ध केले, व त्याला आता 'श्वातालचे कलादालनाचे प्रमेय' असे म्हटले जाते. त्याने असे मानले की कलादानाचा मजला एका बहुभजा आकृतीने दाखवता येईल जेणे करून तिचा भुजा 'न' अशा आहेत, तसेच संरक्षक एका जागीच उभा राहील, पण तो निरीक्षणासाठी आपल्याभोवती पूर्णपणे फिरू शकेल. अशा स्थितीत किमान संरक्षकांची संख्या $^{\text{न}}/_{\text{३}}$ च्या उत्तरातील पूर्णांकापेक्षा अधिक असणार नाही.

या प्रमेयाची सिद्धता देण्यासाठी कलादानाच्या त्या बहुभुजा आकृतीला छेद न देणारे विकर्ण आखून त्रिभुजांमध्ये विभाजित करावे लागते आणि त्यानंतर विगमन (इंडक्शन) पद्धतीने सिद्धता करणे शक्य होते.

आकृती ३ मधील कलादालनाच्या बहुभुजा आकृतीत न = २८ आहेत. त्यामुळे श्वातालच्या प्रमेयाप्रमाणे किमान संरक्षकांची संख्या पूर्णांक $\left(^{\text{२८}}/_{\text{३}}\right)$= ९ पेक्षा अधिक असणार नाही. प्रत्यक्षात ९ पेक्षा कमी संरक्षकांनी काम होऊ शकेल. आकृती ४ मधील कलादालनात न = १२ आहेत आणि पूर्णांक $\left(^{\text{१२}}/_{\text{३}}\right)$ = ४ इतके सर्व संरक्षक ठेवणे मात्र भाग आहे.



आकृती ३



आकृती ४

उपयुक्तता

वरील उदाहरणे भूमितीमधील त्रिभुज या प्राथमिक आकृतीचा गणिताच्या विकासात लागलेल्या हातभाराची कल्पना देतात. तरी शालेय गणित शिकताना आणि शिकवताना त्रिभुजाचे गुणधर्म आणि संबंधित सर्व प्रमेये नीट आत्मसात व्हावी यावर भर देणे आवश्यक आहे.

१०

मितीचे अजब विश्व

गणित आपल्याला बुचकळ्यात टाकणाऱ्या अनेक प्रश्नांची उत्तरे शोधण्यात मदत करते, पण काही वेळा गणितच आपल्याला आश्चर्यचकित करते हे विशेष. मिती (डायमेन्शन) ही गणिती संकल्पना त्यातली एक बाब आहे. भूमितीमधील आकृत्या आपल्याला मितीची कल्पना समजण्यास मदत करतात. उदाहरणार्थ, लांबी, रूंदी नसलेला बिंदू म्हणजे शून्य मिती, सपाट पृष्ठ भागावर काढलेली रेषा जिला फक्त लांबी असते तिची मिती १, अशा रेषांनी बंदीस्त बहुभुजा आकृती तयार केल्यास जिची परिमिती आणि क्षेत्रफळ काढता येते तिची मिती २, तर आपल्या अंतराळातील घन वस्तू घेतली (उदा. चेंडू, कप) जिचे घनफळ काढता येते तिची मिती ३ असे समजणे आपल्याला सोपे जाते, कारण आपण त्रिमितीच्या अंतराळात राहतो. म्हणूनच चार किंवा त्याहून अधिक अंतराळाच्या मितींची कल्पना करणे सहजपणे जमत नाही. अधिक मितीतील वस्तू समोर आली तरी ती ओळखणे बरेच कठीण जाते. उदाहरण म्हणून आकृती १ मधील सी. एफ. क्लाइन या गणितज्ञाने मांडलेली चार मितीमधील बाटली पहा.



आकृती १

वाढीव मितीतील गणित

ए. आइन्स्टाइन यांच्या सापेक्षतावाद सिद्धांतामध्ये चार मिती वापरल्या आहेत, पण त्यातील तीन मिती अंतराळाच्या आणि चौथी मिती ही काळाची अशी आहे. जरी भौतिकदृष्ट्या किंवा भूमितीद्वारे तीनपेक्षा अधिक मितींतील आकृत्या आकलनास कठीण असल्या तरी गणित त्यांना अमूर्तरूपात बीजगणिताच्या प्रगत माध्यमातून सहज मांडून सर्व गणिती प्रक्रिया करण्यास पूर्ण वाव देते.

मात्र मिती जस-जशी वाढत जाते, तसे काही चक्रावून टाकणारे निष्कर्ष पुढे येतात. उदाहरणार्थ, दोन मितीतील एका वर्तुळाचे क्षेत्रफळ आणि त्याच त्रिज्येने तीन मितीत तयार केलेल्या गोलकाचे घनफळ बघितल्यास, घनफळाचे मूल्य क्षेत्रफळाच्या मूल्यापेक्षा अधिक येते. यावरून असा अंदाज येतो की त्रिज्या तीच ठेवली आणि मिती वाढवत गेल्यास व्याप्त अंतराळाचे मूल्य वाढत जाईल. तथापि तसे होत नाही हे खालील उदाहरणावरून स्पष्ट होईल. गोलकाचे आकारमान किंवा घनफळ (घ) काढण्याचे व्यापक सूत्र असे आहे (त्र म्हणजे त्रिज्या आणि क म्हणजे मिती) :

$$घ_{क} = \frac{\pi^{क/२}\ त्र^{क}}{(क/२)!}$$, जेव्हा क सम असेल (उदा. क = २, ४, ६,...)

आणि

$$घ_{क} = \frac{\pi^{(क - १)/२}\ ((क + १)/२)!\ २^{क + १}\ त्र^{क}}{(क+१)!},$$

जेव्हा क विषम असेल (उदा. क = ३, ५, ७, ...)

(क! म्हणजे क × (क – १) × (क – २) × ...... × २ × १)

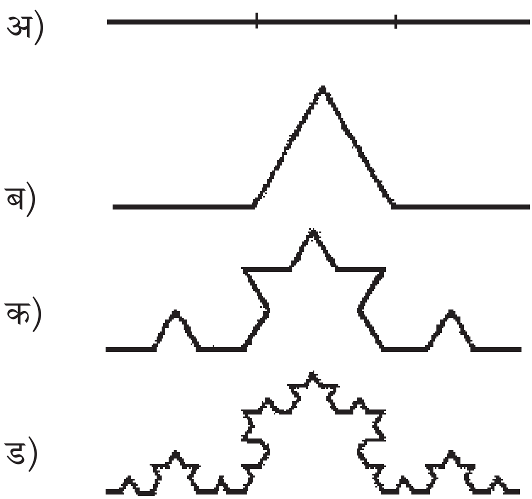
जर आपण त्रिज्या त्र = २ मी. आणि π = २२/७ असे मानले तर वरील सूत्रांनी विविध मितींमधील त्या गोलकसदृष आकृत्तींनी व्याप्त अंतराळाचे मूल्य मिळेल. खालील तक्ता या संदर्भात बघावा.

मिती	व्याप्त अंतराळ किंवा आकारमान
२	१२.५७ मी.^{२}
३	३३.५२ मी.^{३}
४	७९.०२ मी.^{४}
५	१६८.५८ मी.^{५}
६	३३१.१३ मी.^{६}
७	६०५.५० मी.^{७}
८	१०४०.७० मी.^{८}
९	१६९१.५६ मी.^{९}
१०	२६१६.६३ मी.^{१०}
...	....
...	....
...	....
२४	३२५२९.५९ मी.^{२४}
२५	३२२९१.३९ मी.^{२५}

हा तक्ता दाखवतो की, २४व्या मिती पर्यंत आकारमान वाढत आहे, पण २५व्या मितीत त्याचे मूल्य कमी झाले आहे, आणि ते मिती पुढे वाढत गेल्यावर तसेच कमी कमी होत जाते, व शून्याच्या जवळ पोहचते. अर्थातच त्रिज्या बदलली तर असा विपरीत प्रवाह दुसऱ्या कुठल्या तरी मितीत सुरू होतो, पण तो होतोच. याला कारण आकारमान किंवा घनफळ काढण्याच्या वरील सूत्रांतील भाजक (भाग देणारी संख्या) हा मिती बरोबर फार मोठ्या प्रमाणात शीघ्रपणे वाढत जातो असे आहे. भौतिक विश्वात याचा अर्थ मोठ्या मितीतील अंतराळ दुमडले जाणे असा आहे.

अपूर्णांक मिती

आतापर्यंतच्या चर्चेत मिती ही पूर्णांक संख्या मानली गेली आहे. पण मिती ही अपूर्णांकात ही असू शकते ही बाब आपल्याला कदाचित आश्चर्यकारक वाटू शकेल. हे कसे घडते ते आपण आकृती २ मध्ये बघुया. आकृती २(अ) एक रेषाखंड आहे. जिचे तीन समान भाग केले आहेत. आकृती २(ब) मध्ये त्यातील मधला भाग काढून तो दोन समान प्रकारे या रेषाखंडाला जोडला गेला आहे. ह्या प्रक्रियेची पुनरावृत्ती करून आकृती २(क) आणि २(ड) काढल्या आहेत. अर्थातच ही प्रक्रिया अमर्यादितपणे करत राहणे शक्य आहे. याला कॉखचा वक्र म्हणतात, कारण तो व्हॉन कॉखनी विसाव्या शतकाच्या प्रारंभी शोधून काढला होता.

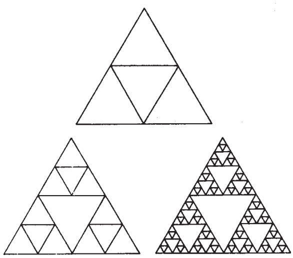


आकृती २

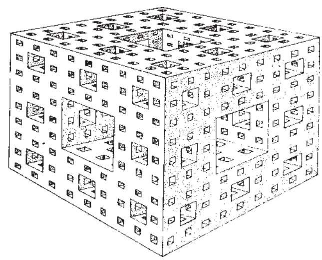
या रेषेची मिती (म) ही रेषाखंडांची संख्या (न) आणि प्रत्येक रेषा खंडांची लांबी (ल) यांच्यातील संबंधावर अवलंबून असते. त्याचे गणिती रूप, $न = ल^{म}$, किंवा लॉगेरिथम स्वरूपात म = लॉग (न)/लॉग (ल) असे होते. पुनरावृत्तीच्या प्रत्येक पायरीवर न ची संख्या चार पटीने वाढते, तर ल ही लांबी

तीनपट कमी होते, म्हणून म = लॉग (४) / लॉग (३) = १.२६ (जवळपास), अशी अपूर्णांक मिती कॉखच्या वक्रासाठी येते.

या प्रकारे रूपांतराची पुनरावृत्ती करून अपूर्णांक मिती असलेले अनेक नमुने तयार करता येतात. उदाहरणार्थ आकृती ३ ची मिती १.५८, तर आकृती ४ ची मिती २.७३ आहे.



आकृती ३



आकृती ४

कंगोरी भूमिती

निसर्गातील अनेक मोहक गोष्टी अपूर्णमितीत आहेत, जशा की समुद्राची किनारपट्टी, डोंगरदऱ्या, हिमपर्ण इत्यादी. अशा अपूर्ण मिती व स्वयंरूपी पुनरावृत्ती या प्रक्रियांना एक वेगळ्या प्रकारे एकत्र करून बी. मँडेलब्रॉट यांनी १९६० साली कंगोरी भूमिती (फ्रॅक्टल जॉमेट्री) विकसित केली. संगणकाच्या जोडीने कंगोरी भूमितीचा वापर करून विविध प्रकारचे आकर्षक नमूने आणि चित्रे तयार केली गेली आहेत. अमूर्त गणिती संकल्पनांचा असा विस्तार अनेक व्यावहारिक बाबतीत उपयोगी ठरत आहे. मितीच्या गणितात अजब विश्व दडलेले आहे, व त्यात संशोधनाला बराच वाव आहे.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

⌘⌘⌘

११

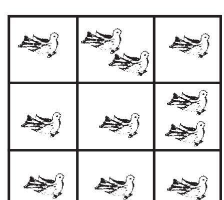
कप्प्यात दडलेले गणित

अगदी सामान्य दिसणाऱ्या गोष्टीत किंवा कल्पनेत अतिशय उपयोगी व चौफेर वापरता येईल असे गणित सामावले असते हे समजले की आश्चर्य वाटते. उदाहरण म्हणून आपण एका कपाटाचे खण किंवा कप्पे हे १० आहेत असे मानुया आणि ११ खेळण्याच्या पेट्या त्यात शक्य तो स्वतंत्रपणे ठेवायचे झाले, तर कमीत कमी एका कप्प्यात तरी एकापेक्षा जास्त पेट्या ठेवायला लागतील, हे पटायला काहीच हरकत नाही. त्या संदर्भात आणखीन एक उदाहरण बघुया. हातमोज्यांच्या एका समूहात तीन हातमोजे असल्यास त्यात कमीत कमी दोन डाव्या किंवा दोन उजव्या हाताचे हातमोजे असतील.

या कल्पनेला गणिती स्वरूपात जे. पी. जी. एल. डिरीच्लेट (१८०५–१८५९) यांनी १८३४ मध्ये कप्प्यांचे उदाहरण देऊन मांडल्यामुळे त्याला काही वेळा डिरीच्लेटचा कप्प्यांचा सिद्धांत म्हणतात. त्याचे जास्त लोकप्रिय नाव *पिजनहोल प्रिन्सिपल* असे आहे, कारण कबुतरांच्या खुराड्यांशी त्याचा संबंध स्पष्टीकरणासाठी बऱ्याच वेळा दिला जातो. हे नाव आर. एम. रॉबिनसन यांनी १९४० साली पहिल्यांदा वापरले. (आकृती १ पहा)



जे. पी. जी. एल. डिरीच्लेट



आकृती १

सिद्धांत वापरणे

कप्प्यांचा सिद्धांत वापरण्यासाठी खालील चार पायऱ्याप्रमाणे जाणे सुचवले जाते :

१) कुठल्या गोष्टी वितरित करायच्या आहेत ते ठरवणे.

२) त्या गोष्टी कुठल्या कप्प्यांत वितरित करायच्या हे ठरवणे.

३) गोष्टी कप्प्यांत कशा वितरित करायच्या याची पद्धत ठरवणे.

४) पिजनहोल किंवा कप्प्यांचा सिद्धांताची कल्पना वापरून योग्य निष्कर्ष काढणे.

आपण एका उदाहरणावरून ही प्रक्रिया समजवून घेऊ.

उदाहरण १ : यादृच्छिक (रँडम) पद्धतीने गोळा केलेल्या माणसांत किमान दोन जणांचे वाढदिवस एकाच दिवशी असले पाहिजेत अशी स्थिती मिळवण्यासाठी कमीत कमी किती माणसे सदरपणे गोळा केली पाहिजेत?

वरच्या पायऱ्यांनुसार आपल्याला माणसे ही एका वर्षाच्या ३६६ दिवसापैकी (लीप वर्ष धरून) प्रत्येक दिवसात एक अशी वितरित करायची आहेत की कमीत कमी दोन माणसांचा वाढदिवस एकाच दिवशी यावा. माणसे ही कुठल्याही क्रमाने किंवा नेमाने निवडली नसल्यामुळे म्हणजेच यादृच्छिक पद्धतीने निवडल्यामुळे, पहिली ३६६ माणसे अशी असू शकतात की, प्रत्येकाचा वाढदिवस वेगवेगळ्या दिवशी असेल. याचा अर्थ असा की कप्प्यांच्या सिद्धांताप्रमाणे जर ३६७ माणसे यादृच्छिक पद्धतीने निवडली, तर कोणा दोघांचा वाढदिवस वर्षाच्या कुठल्या तरी एका दिवशी नक्कीच असेल. तरी आपल्याला किमान ३६७ माणसे निवडणे भाग आहे.

कप्प्यांचा सिद्धांत गणिती रूपात अनेक दिशांनी विस्तारित करण्यात आला आहे. त्यातील एक म्हणजे जर का गोष्टींची संख्या कप्प्यांच्या संख्येच्या काही पटीने मोठी असेल, तर काय निष्कर्ष निघू शकतो. आपण त्याचे उदाहरण बघुया.

उदाहरण २ : १०० लोकांचा समुदाय घेतला तर कमीत कमी किती माणसे अशी असतील ज्यांच्या वाढदिवसाचा महिना तोच असेल.

१०० माणसे या संख्येला एका वर्षाच्या १२ महिन्यांनी भागितले की उत्तर ८ व शेष ४ असे येते. याचा अर्थ कमीत कमी ९ माणसे त्या समुदायात असतील ज्यांचा वाढदिवस कुठल्यातरी एका महिन्यातच असणार.

वरील नमुनादाखल उदाहरणावरून असा समज होऊ नये की कप्प्यांचा सिद्धांत आणि त्याचा विस्तार हा केवळ मंनोरंजनात्मक गणिती कोडी सोडवण्यासाठी उपयुक्त आहे. या सिद्धांताचा प्रत्यक्षात उपयोग कसा होऊ शकतो यासाठी खालील दोन उदाहरणे बघुया.

प्रत्यक्ष वापर

उदाहरण ३ : एका विद्यापीठात सकाळ पासून रात्रीपर्यंत ३५ कालखंडात वर्ग भरवले जातात. जर विद्यापीठात ६८० वेगवेगळे वर्ग भरवायचे झाले तर त्यासाठी वेगवेगळ्या अशा किमान किती खोल्या पाहिजेत?

६८० वर्गांना ३५ कालखंडानी भागितले तर उत्तर १९ व शेष १५ राहतो. याचा अर्थ किमान २० खोल्या असतील तर वेगवेगळे वर्ग भरवणे शक्य आहे. शैक्षणिक व इतर नियोजनासाठी या प्रकारचे मार्गदर्शन महत्त्वाचे आहे.

उदाहरण ४ : एक संस्थेत १५० संगणक २० प्रिंटर्सना असे जोडायचे आहेत की त्यातील कुठलेही २० संगणक त्या २० प्रिंटर्सना थेटपणे जोडले गेले पाहिजेत. तर यासाठी कमीत कमी किती जोडणी तारा (केबल्स) लागतील?

$स_{१}$, $स_{२}$, ..., $स_{१५०}$ हे संगणक आणि $प_{१}$, $प_{२}$, ..., $प_{२०}$ हे प्रिंटर आहेत असे मानुया. त्यातील $स_{१}$, ..., $स_{२०}$ संगणक $प_{१}$, $प_{२}$, ..., $प_{२०}$ या प्रिंटर्सना थेट जोडले आहेत असे मानुया आणि उरलेले $स_{२१}$, $स_{२२}$, ..., $स_{१५०}$ हे संगणक सर्व प्रिंटर्सना जोडले आहेत असे चित्र तयार होईल. म्हणजेच, २० + १३० × २० = २,६२० केबल्स लागतील. कप्प्यांच्या सिद्धांताने असे सिद्ध करता येते की केबल्सची संख्या याहून कमी असून चालणार नाही.

विस्तार

वरील चर्चेवरून लक्षात येईल की कप्प्यांचा सिद्धांत स्वतंत्रपणे किंवा काही इतर गणिती पद्धतीसोबत वापरल्यास अनेक बाबतीत उपयोगी होऊ शकतो. तो वापरण्यासाठी काही निवडक क्षेत्रे अशी आहेत :

अ) दूरध्वनि क्रमांक तसेच इंटरनेट प्रोटाकॉल्स पत्ते (आयपी ॲड्रेस) देण्याची पद्धत विकसित करणे.

ब) वाहन क्रमांक देण्याची पद्धत सुधारित करणे. (वाढत जाणाऱ्या वाहनांची संख्या लक्षात घेऊन)

क) गोदामात जास्तीत जास्त वस्तू साठवण्यासाठी किमान खण, कपाटे आदींची व्यवस्था करणे.

ड) बुद्धीबळ, टेनिस, क्रिकेट इत्यादी खेळांच्या सामन्यांचे आयोजन करणे.

इ) खेळ, अभ्यास, रुग्णालयातील सेवा आदींचे वेळापत्रक तयार करणे.

कप्प्यांचा मूळ सिद्धांत व त्याची विस्तारित आणि प्रगत रूपे यांचा गणितातील अन्य शाखांत विविध तऱ्हेने उपयोग होतो. तसेच संगणक क्षेत्रात ही या सिद्धांताचा वापर अनेक प्रकारे केला जात आहे हे विशेष. रॅमझे थेयरी ही या सिद्धांताचा एक विस्तार असून ती अनेक यंत्रणांतील व्यवस्था व संरचना तपासण्यासाठी उपयोगी सिद्ध झालेली आहे.

अगदी सामान्य अशी वाटणारी मोजणीची किंवा गणती करण्याची पद्धत गणिताद्वारे व्यावहारिकदृष्ट्या बहुपयोगी सिद्ध होऊ शकते ही गणिताची क्षमता लक्षणीय आहे हे खरे.

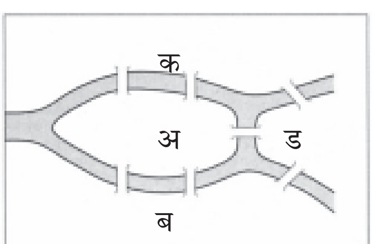
(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

⌘⌘⌘

१२

आलेखातून उमलेले गणित

गणिताच्या काही शाखांचा उदय सामान्य वाटणाऱ्या प्रश्नांनी होऊन पुढे त्यांचा व्यापक प्रमाणावर विस्तार झाल्याचे आढळते. आलेख सिद्धांत म्हणजे ग्राफ थेयरीची सुरवात अशा प्रकारेच झाली. कोनिग्सबर्ग म्हणजे आताचे रशियामधील कालिनिनग्राड या शहराचे प्रेगेल या नदीच्या शाखांमुळे चार भाग पडले होते. १८व्या शतकात सात सेतू या भागांना जोडीत असत. आकृती १ मध्ये ते चार भाग अ, ब, क आणि ड तसेच सात सेतू दाखवले आहेत. सहसा रविवारी त्या शहरातील लोक या सेतूंचा वापर करून एकमेकांची भेट घेत असत. त्यापैकी अनेकांच्या मनात असा प्रश्न येई की समजा शहराच्या एका भागापासून चालायला सुरुवात केली आणि सर्व सेतू वापरले आणि परत सुरुवातीच्या भागात आपण यायचे ठरवले तर तसे कुठलाही सेतू दोनदा न वापरता करणे शक्य आहे का ? हे जर प्रत्यक्षात चालून तपासयचे म्हटल्यास अतिशय मोठ्या संख्येतील शक्यता तपासणे भाग आहे ($२^{७} \times ७ \times ६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २ \times १$).



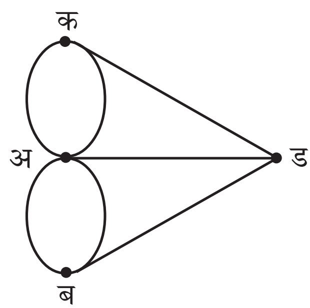
आकृती १

गणिती स्वरूप

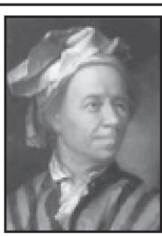
लिओनार्ड ऑयलर या स्विस गणितज्ञाने १७३६ मध्ये या प्रश्नाचे सोपे गणिती रूप एका आलेख स्वरूपात मांडून (आकृती २) उत्तर काढून प्रसिद्ध केले. अशा प्रकारे त्याने ग्राफ थेयरी या एका गणिताच्या शाखेची खऱ्या अर्थाने सुरुवात व तिची उपयुक्तता पुढे आणली. त्याने वरील चार भाग हे चार बिंदू आणि सात सेतू हे त्यांना जोडणाऱ्या रेषांनी दाखवले (आकृती २). ऑयलर यांनी असे सिद्ध केले की पृष्ठ भागावरील अशा आलेख किंवा ग्राफसाठी,

भाग – जोडणाऱ्या रेषा + बिंदू = २,

हे व्यापक सूत्र सिद्ध होणाऱ्या स्थितीत कोनिग्सबर्गच्या व तत्सम प्रश्नाचे उत्तर होय असते. कोनिग्सबर्ग मध्ये चार भाग, सात रेषा आणि चार बिंदू असल्यामुळे ते या सूत्रात बसत नाही, याचा अर्थ कुठला तरी सेतू दोनदा ओलांडणे भाग आहे. दुसऱ्या प्रकारे हे सूत्र सांगते की प्रत्येक बिंदूच्या जोडण्यांची संख्या सम (२,४,६,....) अशी असेल तरच कुठलाही सेतू दोनदा ओलांडणे टाळता येऊ शकते. मात्र तसे घडत नसल्याचे आकृती २ मध्ये स्पष्ट आहे, उदाहरणार्थ ड बिंदूच्या जोडण्या ३ अशी विषम संख्या आहे.



आकृती २



लिओनार्ड ऑयलर (१७०७–१७८३) हा त्याच्या वडीलांच्या इच्छेप्रमाणे पाद्री बनण्यासाठी बासेल विद्यापीठात शिक्षण घेऊ लागला. ते शिक्षण घेत असताना सुप्रसिद्ध गणिती प्राध्यापक जोहान बर्नोलीना त्याच्यातील गणिती प्रतिभा जाणवली व

त्यास गणित विषयाचा अभ्यासक्रम घेण्यास सांगितले, जो त्याने १७२३ मध्ये संपवला. १७२७ मध्ये रशियातील सेंट पिटर्सबर्ग येथील अकादमीत त्याला प्राध्यापक म्हणून पीटर-द-ग्रेट याने आमंत्रित केले. पुढे १७४१ ते १७६६ दरम्यान त्याने बर्लिन अकादमीत काम केले व १७६६ मध्ये तो सेंट पिटर्सबर्ग अकादमीत परत आला आणि शेवटपर्यंत तिथेच राहिला.

गणिताच्या त्या काळातील जवळजवळ सर्व शाखांत त्याने भरीव योगदान केले आहे हे विशेष. आजपर्यंत जगात गणिती पुस्तके, लेख व तसे इतर साहित्य निर्माण करणारे बघितल्यास त्याचे नाव त्यांत पहिले आहे. शेवटची जवळपास १७ वर्षे आंधळेपण आले असताना देखील त्याचे गणितातील योगदानाचे काम थांबले नव्हते कारण त्याची तल्लख स्मरणशक्ती शाबूत होती. त्याचे सर्व गणिती कार्य ८० मोठ्या खंडात (लॅटीन भाषेत) प्रसिद्ध झाले आहे, यावरून त्याची विराट गणिती प्रतिभा व लेख-पुस्तके लिहिण्याची चिकाटी दिसून येते. ग्राफ थेयरी शिवाय अनेक गणिती संकल्पना त्याच्या नावाशी जोडलेल्या आहेत.

प्रचंड विस्तार

ग्राफ थेयरीचा विस्तार अनेक दिशांनी आता झाला आहे व जालकरचना किंवा जाळ्यांचे विश्लेषण म्हणजे नेटवर्क ॲनालिसिस या व्यापक नावाने ही गणिती शाखा आता ओळखली जाते. या गणिती शाखेचा उपयोग मोठ्या प्रमाणात विविध क्षेत्रात केला जातो कारण आलेख किंवा जाळ्याच्या रेषांना वापरानुरूप गुणधर्म जोडून विश्लेषण करता येऊ शकते. उदाहरणार्थ पेयजल वाहिन्यांचे जाळे, रस्त्यांचे जाळे, विद्युतवाहिन्यांचे जाळे, बस, रेल्वे व विमान वाहतुकीचे जाळे अशा विविध जाळ्यांतून कमीत कमी वेळात किंवा अंतर कापून वाहतूक करायची किंवा सेवा पुरवायची अशा प्रकारचे प्रश्न व्यवस्थापनासाठी फार महत्त्वाचे असतात. यासाठी कार्यक्षम पद्धती निर्माण करण्याचे संशोधन अव्याहत चालू आहे. अशा पद्धती संगणकाद्वारे प्रभावीपणे वापरता येणे हे एक मोठे आव्हान आहे.

ग्राफ थेयरीचे गणित फक्त पृष्ठ भागापुरते मर्यादित राहिले नसून त्रिमितीतील जाळ्यांचा अभ्यास त्याने सहज करता येतो. म्हणूनच स्थानिक, क्षेत्रीय, राष्ट्रीय

व आंतरराष्ट्रीय पातळीवरील रस्ते, रेल्वे व अन्य परिवहन आणि दळणवळण यांच्या पायाभूत सुविधांचे नियोजन करण्यास अशा गणिती पद्धती व प्रतिकृती (मॉडेल्स) मोठ्या प्रमाणात निर्माण केल्या गेल्या आहेत. भारतातील काही नगरांत रस्ते आणि भूवापराचे सुंयक्तपणे नियोजन आणि त्यांचा विस्तार अशा गणिती पद्धती वापरून सुचवल्या जात आहेत.

जाळ्यांची घनता, पर्यायी मार्गांची उपलब्धता आणि त्यांची उपयोगिता मोजण्यासाठी अनेक निर्देशांक ग्राफ थेयरीने विकसित केले आहेत. उदाहरणार्थ, आलेखातील एकूण रेषांच्या संख्येला त्यातील एकूण बिंदूंच्या संख्येने भाग देऊन 'बीटा' नावाचा निर्देशांक तयार केला जातो, जो जाळ्याची व्याप्ती दाखवतो. त्याचा वापर शहरांतील विविध जाळ्यांची परिपूर्णता तसेच इतर शहरांशी तुलना करण्यासाठी होऊ शकतो. याच पद्धतीने नद्यांची खोरे व कालव्यांची संरचना नियोजनाला मदत मिळू शकते.

ऑयलरने मांडलेल्या या एका गणित सिद्धांताचा उपयोग रासायनिक प्रक्रिया ते एडस्‌सारख्या रोगाचा फैलाव ते इंटरनेट वापरणाऱ्यांची सामाजिक जाळी यांच्या अभ्यासात होत आहे या वरून अमूर्त रूपातले गणिती निष्कर्ष किती प्रभावी ठरू शकतात ही कल्पना येते.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

पूरक माहिती :

- काळाच्या ओघात पूर्वीच्या कोनिग्सबर्ग येथील त्या सात ऐतिहासिक सेतूंमध्ये अर्थातच अनेक स्थित्यंतरे झाली आहेत. मात्र सध्या उपलब्ध असलेल्या सेतूंची स्थिती लक्षात घेता ऑयलरचा त्यावेळेचा निष्कर्ष बदललेला नाही असे आढळते (निवडक संदर्भ सूचीमधील इंग्रजी संदर्भ क्रमांक २६ बघा).

ꕤꕤꕤ

१३

महती विखरलेल्या बिंदूंची

भूमितीमधील बिंदू म्हणजे लांबी-रूंदी नसलेली एक अगदी प्राथमिक आकृती ही आपल्या परिचयाची आहे. मात्र थेंबे-थेंबे तळे साचे ह्या म्हणी प्रमाणे अनेक बिंदू एकत्र आल्यावर किंवा ते दूर-दूर पसरले असले, तरी ते फार उपयुक्त माहिती देऊ शकतात. बिंदूच्या वितरणांचे साधे विश्लेषण देखील प्रत्यक्षात अनेक प्रकारे उपयोगी सिद्ध झाले आहे याची नोंद घ्यावी. अशा उपयोजनेची सुरुवात नाट्यमयपणे झाली, कशी ती आपण पाहूया.

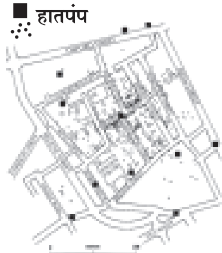
रोगाचे मूळ

इंग्लंडमधील लंडन शहरातील काही भागात १८५४ साली पटकी म्हणजे कॉलराने हाहाकार उडवला होता व त्याने अनेक लोक मृत्यूमुखी पडले होते. शहराच्या काही विशिष्ट भागातच असे का घडले याबाबत डॉ. जॉन स्नो यांनी त्यावेळी एक अभ्यास हाती घेतला. कॉलरा हा प्रामुख्याने दूषित पाण्यामुळे होतो. लंडनमध्ये त्याकाळी पाणी हातपंपाने काढून वापरण्याची व्यवस्था होती. तरी डॉ. स्नो यांनी एका नकाश्यावर मृत्यूमुखी पडलेल्या लोकांच्या घरांना बिंदू तसेच त्या भागातील हातपंपांना छोटा चौकोन यांनी रेखाटले (आकृती १ पहा). त्या बिंदूंच्या आकृतिबंधाचे काळजीपूर्वक निरीक्षण केल्यावर त्यांच्या लक्षात आले की काही विशिष्ट भागात बिंदूची घनता फार होती, म्हणजेच त्या घरांत मृत्यू मोठ्या प्रमाणात घडले होते. त्याचा अर्थ त्या घरांतील रहिवासी ज्या हातपंपातून पाणी घेत होते ते कदाचित दूषित पाणी देत होते. त्यांनी त्या काही निवडक पंपाची खास तपासणी केली. त्यांना ते पंप गंजलेले आणि पाणी दूषित करणारे आढळले. त्यातील एक हातपंप आजही लंडनमध्ये आठवण

म्हणून जपून ठेवलेला आहे, जो आकृती २ मध्ये दाखवला आहे. ते पंप बदलण्यात आले किंवा बंद करण्यात आले, आणि त्या भागातील जीवघेणा कॉलरा आटोक्यात आला. बिंदूंचे साधे चित्रांकन किती महत्त्वाची भूमिका निभावू शकते याची प्रचिती या घटनेवरून लक्षात येते.



डॉ. जॉन स्नो (१८१३–१८५८)



आकृती १



आकृती २

स्थान–निगडीत विश्लेषण

बिंदूचे आलेख व त्यांचे गणिती विश्लेषण त्यामुळे मोठ्या प्रमाणावर सुरू झाले. स्थान–निगडीत आकडे व माहिती यांच्या अभ्यासासाठी भूगोलाची एक उपशाखा आता तयार झाली आहे जिला *मात्रात्मक* किंवा *संख्यात्मक* भूगोल (क्वान्टिटेटिव्ह जिऑग्राफी) असे म्हटले जाते. या उपशाखेचा गाभा आकृती ३ मध्ये दाखवला आहे. त्याप्रमाणे परिस्थितीचे वर्णन चित्रांकन आणि कुठे काय आहे याचे आकडे गोळा करून करणे ही एक पायरी आहे. नंतर त्या आकडेवारीवर गणिती विश्लेषण करून कारण शोधणे, आणि समुचित उपाय सुचवणे अशा प्रकारे प्रक्रिया केली जाते.

परिस्थितीचे वर्णन ⟶ **कुठे काय आहे ?**

(चित्रांकन व आकडेवारी गोळा करणे)

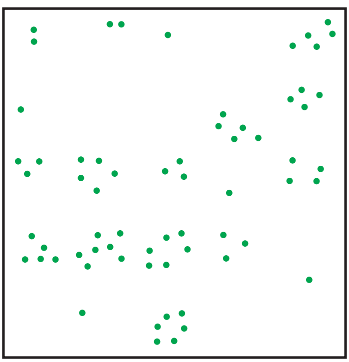
गणिती विश्लेषण

उपाय सुचवणे ⟶ **का आणि काय करायचे ?**

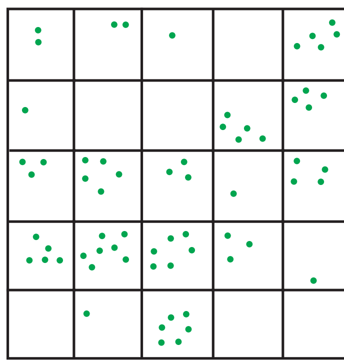
आकृती ३

जंगलातील नैसर्गिक झाडे

नैसर्गिकपणे उत्पन्न झालेली एकाच जातिची झाडे जवळ-जवळ समूहात असतात का हा प्रश्न अनेक वेळा फार महत्त्वाचा असू शकतो. कारण, त्यांची लागवड आपण करायची म्हटल्यास त्यातील अंतर कसे असावे हा महत्त्वपूर्ण निर्णय घ्यावा लागतो. यासाठी बिंदू-विशेष चित्रांकन आणि विश्लेषण कसे वापरता येईल ते बघुया. प्रथम जंगलाचे एक क्षेत्र नमुना म्हणून निवडुया आणि त्यात त्या विशिष्ट झाडांचे स्थान बिंदूनी दाखवूया. उदाहरणार्थ, आकृती ४ मध्ये १० × १० मी. या वर्गाने जंगलाचा एक निवडक भाग तसेच बिंदूंनी विशिष्ट जातिची झाडे कशी उपस्थित आहे ते दाखवले आहे. बिंदूंच्या अशा विखुरलेल्या आकृतीला पांगलेले बिंदू आकृती (स्कॅटर डॉयग्रॅम किंवा स्कॅटर प्लॉट) असे म्हणतात.



आकृती ४



आकृती ५

आकृती ४ मधील बिंदूचे केवळ निरीक्षण झाडे समूहात आहेत की नाही हे ठामपणे सांगू शकत नाही. म्हणून आपण गृहीत धरूया की झाडांचे वितरण समप्रमाणात असून सांख्यिकी किंवा संख्या शास्त्रातील पॉयसों वितरणाप्रमाणे विखुरलेली आहेत. प्रत्यक्षात असे आहे किंवा कसे, हे तपासण्यासाठी आकृती ४ मधील चौरसाला २ × २ मी. अशा २५ लहान व एकमेकाला लागून असलेल्या चौकटीत विभागून प्रत्येक चौकटीत किती झाडे आहेत ते मोजूया (आकृती ५). त्याप्रमाणे केलेली झाडांची गणती तक्ता १ प्रमाणे आहे :

तक्ता १

२	२	१	०	५
१	०	०	५	४
३	५	३	१	४
५	७	६	३	१
०	१	६	०	०

छोट्या २५ चौकटीत एकूण ६५ झाडे आहेत. त्यांची सरासरी ६५/२५ = २.६० प्रति चौकट अशी येते. याचा वापर संख्याशास्त्रातील काही गणिती पद्धती वापरून (काय-स्केअर टेस्ट), ९९% विश्वासाने सांगता येते की ती झाडे समूहात आहेत. एक गोष्ट मात्र लक्षात ठेवली पाहिजे की छोट्या चौकटींची संख्या या विश्लेषणात कळीची भूमिका निभावते. त्यांची संख्या जास्त असणे नेहमीच सहाय्यक ठरते. अशा विश्लेषणाला पांगापांग (डिस्पर्शन) विश्लेषण म्हणतात व त्याच्या अनेक गणिती पद्धती उपलब्ध आहेत.

निवडक विश्लेषण पद्धती

बिंदू-विशेष विश्लेषणासाठीची प्राथमिक पद्धत खालील प्रश्नांची उत्तरे शोधते आणि त्यासाठी चित्रांकन व काही साधी गणिती रिती वापरते.

- बिंदूंचे संच भौगोलिक दृष्टिने समूहात आहेत का ?
- बिंदूंचे संच पांगलेले आहेत का ?
- बिंदूंच्या क्षेत्रीय संचांत काही परस्पर गणिती संबंध आहे का ?
- काही बिंदू सदूर किंवा फारच दूर असे आहेत का ?
- बिंदूंचे वितरण काही क्षेत्रीय कल दाखवत आहेत का ?

मोठ्या प्रमाणात बिंदू तसेच त्यांच्याशी संबंधित माहितीचे घटक अनेक असल्यास विश्लेषणासाठी एक संगणक आधारित प्रगत पद्धत आता उपलब्ध आहे, जिला *आकडेवारी खनन* (डेटा माइनिंग) म्हणतात. त्यासाठी विविध आज्ञा प्रणालींचे (सॉफ्टवेअर) संच बाजारात उपलब्ध आहेत. अशा अतिशय सक्षम प्रणालींचा वापर हल्ली मोठ्या प्रमाणात अनेक उत्पादनकर्ते, सेवा पुरवठादार आणि मोठाली बहुउद्देशीय वस्तुचे दुकानदार त्यांचा ग्राहकांच्या सबंधीचा सखोल अभ्यास करून त्यांची उत्पादने व किंमत, घरपोच सेवा व

नवीन शाखा उघडणे असे निर्णय घेण्यासाठी करतात. थोडक्यात स्थांनाशी संबंधित माहिती अशा बिंदू विश्लेषणामुळे फार मोलाची ठरते.

भौगोलिक माहिती सयंत्रणा

आपण आतापर्यंत बिंदू-विशेष विश्लेषणाची माहिती बघितली आहे. त्याच्या जोडीला रेषा-विशेष विश्लेषण आणि बहुकोनाकृती (पॉलिगॉन) विश्लेषणाच्या विविध गणिती पद्धती पण विकसित झाल्या आहेत. या सर्वांमुळे क्षेत्रीय भागातील घडामोडींचा अभ्यास हाती घेऊन इष्टतम निर्णय घेण्यास मदत मिळते. उदाहरणार्थ निवडणुकांचे क्षेत्रीय निकाल, रोगांचा प्रादुर्भाव व फैलाव, गुन्हे तपास, दंगे नियंत्रण, पर्यावरणातील बदल, रस्ते अपघात, शाळा, पोस्ट कार्यालय व सार्वजनिक शिधा वाटप व्यवस्था अशा सेवांचे स्थान निश्चित करणे अशी उपयोजनांची विस्तृत दालने आहेत. या विश्लेषणाची व्याप्ती काळाची मिती सोबत घेतल्यास आणखीन उपयोगी सिद्ध होते. ऐतिहासिक घटनांचा अभ्यास त्यामुळे अधिक सखोल होऊ शकतो.

अर्थातच असे विश्लेषण संगणकाच्या मदतीशिवाय सहसा शक्य नाही. या दृष्टिने १९७० च्या दशकात उदयास आलेली संगणक आधारित *भौगोलिक माहिती सयंत्रणा* (जॉऑग्रफिक इन्फर्मेशन सिस्टिम - जीआयएस) ही एक वरदानच ठरली आहे. ही प्रणाली कार्यान्वित करण्यासाठी अनेक संगणक आज्ञावली उपलब्ध आहेत. चित्रे, नकाशे व त्यांच्याशी संबंधित आकडेवारी यांना अंकीय स्वरूपात साठवल्यावर जीआयएस आज्ञावली या दोन प्रकारच्या माहिती साठ्यांना एकत्रित गुंफते. या एकजिनसी माहितीसाठ्याकडून एखाद्या ठिकाणाबाबत तर्कसंगत पद्धतीने माहिती मिळवता येते. (उदा. शहरातील पेयजलाच्या २० वर्ष किंवा त्याहून जुन्या वाहिन्या कुठे आणि किती आहेत, अशा प्रश्नाचे उत्तर चित्रे व आकडेवारीसह एकत्रपणे मिळते) तसेच अभियांत्रिकी, सांख्यिकी आणि नियोजनासाठीच्या प्रतिकृती (मॉडेल्स) या माहितीसाठ्याशी जोडून विविध पर्यायांची तपासणी संगणकाद्वारे करून योग्य असा पर्याय निवडण्यास भरीव मदत मिळते. संबंधित माहिती व आकडेवारी अहवाल, नकाशे आणि तक्ते अशा पाहिजे त्या स्वरूपात सहजपणे उपलब्ध होतात. उपग्रहाद्वारे काढलेली छायाचित्रेही याबरोबर वापरता येतात.

मोजमापन, आरेखन, प्रतिकृती रचना, बदलाचा मागोवा घेणे, माहितीचे आकर्षक सादरीकरण आणि अंदाज वर्तवणे अशी चतुरःस्त्र क्षमता असलेली

भौगोलिक माहिती सयंत्रणा पूर्णपणे वापरता येणे हे मानवी बुद्धीमत्तेला एक आव्हानच आहे. भारतात या प्रणालीचा उपयोग भूवापर नियोजन, नगर–नियोजन व व्यवस्थापन, परिवहन नियोजन, पाणी, वीज आणि घन कचरा व्यवस्थापन, पर्यावरण संरक्षण अशा विविध बाबतीत सुरू झाला असून राष्ट्रीय, राज्य तसेच स्थानिक स्वराज्य स्तरांवर असे बरेच उपक्रम हाती घेण्यात आले आहेत. चांगल्या शासनव्यवस्थेसाठी अशी माहिती सयंत्रणा एक आदर्श साधन म्हणून वापरली जाऊ शकते हे अनेक अभ्यास आणि उपयोजनांवरून स्पष्ट होते. खाजगी क्षेत्रात देखील ही सयंत्रणा मोठ्या प्रमाणात वापरली जाते. बिंदू–विशेष विश्लेषण हा या सयंत्रणेचा एक महत्त्वपूर्ण घटक आहे. हे विसरता कामा नये.

पुढील वाटचाल

साध्या बिंदू–विशेष विश्लेषणापासून सुरू झालेला प्रवास आता फार मोठ्या मुक्कामावर पोहचला आहे. गरज आहे ती अधिक प्रगत विश्लेषणासाठी गणिती पद्धती विकसित करणे, डेटा माइनिंग तसेच भौगोलिक माहिती सयंत्रणा व संलग्न तंत्रज्ञानाचा वापर अधिकाधिक क्षेत्रात करणे यांची. तरी खास करून विद्यार्थीवर्गाने या क्षेत्रात पुढे उपलब्ध होऊ शकणाऱ्या वाढत्या संधी डोळ्यासमोर ठेवून आवश्यक त्या गणिती ज्ञानाचे व तंत्रज्ञानाचे शिक्षण आणि प्रशिक्षण घ्यावे असे सुचवले जाते. बिंदू आकाराने लहान पण उपयोगासाठी महान आहेत हे मान्य करावे लागते.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

पूरक माहिती :

- भौगोलिक माहिती सयंत्रणेचा तांत्रिक तपशील आणि प्रत्यक्षात केलेला वापर याबाबत पुढील संदर्भ पहा :
  पाटकर, व्ही., ''भौगोलिक माहिती सयंत्रणा आणि इ–गव्हर्नन्स'', *समाज प्रबोधन पत्रिका*, खंड ४६, अंक १८२, एप्रिल–जून २००८, पृ. २०९–२१५.

⌘⌘⌘

१४

गणित लघु-जगताचे

माहिती व संप्रेषण तंत्रज्ञानाच्या मागील चार ते पाच दशकातील लक्षणीय विकासामुळे स्थान आणि काळ या दोन महत्त्वपूर्ण घटकांवर मानवाला भरीव प्रमाणात प्रभुत्व मिळवता आले आहे. जगाच्या पाठीवर कुठेही घडत असलेली घटना, जशी की फुटबॉल किंवा टेनिसचे सामने, त्याच क्षणाला दूरचित्रवाणी संचातून पृथ्वीच्या दुसऱ्या टोकावरून बघणे आता शक्य आहे. तसेच दूरध्वनी, इ-मेल व इतर संगणकीय माध्यमांतून तात्काळ व कुठेही स्थित असलेल्या व्यक्तीशी संपर्क साधणे सहसा शक्य झाले आहे. एका अर्थाने आपले जग छोटे होत चालले आहे. ह्या शक्यतेचा अंदाज घेऊन १९७० मध्ये कॅनडा-निवासी प्राध्यापक मार्शल मॅक्लुहन (१९११-१९८०) या आधुनिक संप्रेषण माध्यमाच्या विशेषज्ञाने 'जागतिक किंवा वैश्विक ग्राम' (ग्लोबल व्हिलेज) ही संकल्पना मांडली. त्याच्या मते जसे एका गावामध्ये जवळपास सर्वांशी कुणाला ही संवाद साधणे शक्य असते, तसेच आगामी माहिती तंत्रज्ञानाच्या मदतीने जगातील कुठल्याही व्यक्तीशी संपर्क आणि संवाद साधणे शक्य होईल. दुर्दैवाने असे मोठ्या प्रमाणात घडलेले त्यांना बघायची संधी मिळाली नाही.

या संकल्पनेवर गंभीरपणे गणिती काम मात्र १९९० च्या दशकात सुरू झाले व त्याला 'लघु-जगत' (स्मॉल-वर्ल्ड) विश्लेषण म्हणतात. विशेष करून ते काम 'जालकरचना विश्लेषण' (नेटवर्क ॲनालिसिस) या व्यापक गणिती विषयाचा एक भाग आहे. लघु-जगत जालकरचना म्हणजे गणितातील एका आलेखाचा (ग्राफचा) असा प्रकार आहे की त्यात शेजारी-शेजारी

नसलेल्या कुठल्या ही बिंदूपर्यंत प्रत्येक बिंदूपासून थोड्या पायऱ्या म्हणजे प्रक्रियांत कसे पोहचता येईल ते शोधणे.

एक महत्त्वपूर्ण प्रयोग

मात्र असे गणित विकसित होण्यापूर्वी वरील संकल्पनेला सामाजिक जाळ्याच्या (सोशल नेटवर्क) संदर्भात तपासण्यासाठी एस. मिलग्रॅम याने १९६० च्या दशकात उत्तर अमेरिकेत एक प्रयोग केला. त्याने यादृच्छिक पद्धतीने निवडलेल्या दोन व्यक्ती एकमेकांना ओळखण्याची संभाव्यता (प्रोबेबिलिटी) किती असेल या दृष्टिकोनातून लघु-जगत प्रश्नाकडे बघितले. गणिती भाषेत म्हणायचे तर जालकाच्या कुठल्याही दोन बिंदूमधील सरासरी अंतर (ॲव्हरेज पाथ लेंथ) किती असेल याचा शोध त्याने घेतला. त्याने नेब्रास्का राज्यातील ओमाहा आणि कॅनसास राज्यातील विचिता या शहरातील यादृच्छिक पद्धतीने निवडलेल्या लोकांकडे दूरवर असलेल्या मॅसेच्युसेटस् राज्यातील बोस्टन शहरातील फक्त नावे असलेल्या माणसांसाठी पुडकी पाठवली. ओमाहा आणि विचिता शहरातील माणसाला बोस्टन मधील ती व्यक्ती माहित असल्यास त्याने ते पुडके थेट तिच्याकडे पाठवावे, पण माहित नसल्यास त्याने ते पुडके त्याचा मित्र किंवा आप्त जो त्याबाबतीत मदत करू शकेल त्याच्याकडे सुपूर्द करावे व तशी नोंद करावी. याच प्रकारे पुढील व्यक्तीने कार्यवाही करावी.

या प्रयोगात एकूण २९६ पुडकी वापरली गेली होती, पण विविध कारणामुळे त्यातील फक्त ६४ पुडकी लक्ष्यित व्यक्तींना मिळाली. विशेष बाब म्हणजे यासाठी वापरल्या गेलेल्या मध्यस्थ व्यक्तींच्या साखळीची सरासरी संख्या *सहाच्या* आसपास होती. या वरून असा एक निष्कर्ष काढण्यात आला की उत्तर अमेरिकेतील माणसे एकमेकांपासून अंदाजे केवळ सहा माणसे इतक्या अंतराने दूर आहेत, अगदी राष्ट्रपतिसुद्धा. या प्रयोगात अनेक त्रुटी आहेत, पण मे १९६७ च्या *सायकोलोजि टूडे* या लोकप्रिय मासिकात 'द स्मॉल-वर्ल्ड प्रॉब्लेम' या शीर्षकाखाली प्रकाशित झालेल्या मिलग्रॅमच्या लेखाने खूप खळबळ माजली आणि आज ही तो निष्कर्ष अनेक लोकांना आठवतो. मात्र या प्रयोगाच्या सर्व बाजू मांडणारा त्याचा सहलेखित शोधलेख १९६९ मध्ये *सोशियोमेट्री* या संशोधन नियतकालिकात प्रसिद्ध झाला. या प्रकारचे प्रयोग त्यानंतर अनेक क्षेत्रात हाती घेण्यात आले, उदाहरणार्थ, अलीकडेच २४,६१३

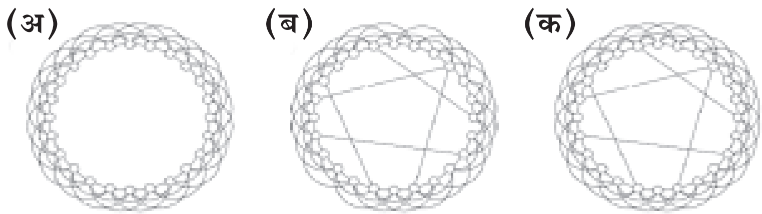
स्वैरपणे निवडलेल्या लोकांना १८ लक्ष्यित सामान्य लोकांना इ-मेलद्वारे संपर्क साधण्यास सांगितले. सदर प्रयोगाने सुद्धा असे दाखवले की लक्ष्यित व्यक्तीला पोहचलेला इ-मेल सरासरी सहा टप्प्यातून (फॉरवर्ड प्रक्रियेद्वारा) मिळाला.

लघु-जगत जालकाचे गणित

लघु-जगत घटनांचे जालकरचनेवर आधारित पहिले गणिती प्रारूप किंवा प्रतिकृती (मॉडेल) डी. जे. वाटस् आणि एस. स्ट्रोगाटझ यांच्या *नेचर* या प्रतिष्ठीत मासिकातील १९९८ मधील लेखात मांडले गेले. त्यांनी असे सिद्ध केले की जालकरचना नैसर्गिक असो किंवा मानवनिर्मित, जर त्यात यादृच्छिक पद्धतीने कुठल्याही बिंदूना जोडणाऱ्या थोड्या प्रमाणात अतिरिक्त साखळ्या घातल्या तर अगदी दूर असलेल्या बिंदूतील अंतर हे संपर्क साधण्यासाठी लक्षणीय प्रमाणात कमी होते. यासाठी त्यांनी दोन गणिती संकल्पनांचा आधार घेतला. एक म्हणजे 'न' बिंदू असलेले एक जालक घेतले व त्यातील प्रत्येक बिंदू त्याच्या जवळच्या २क बिंदूशी जोडले आहे असे मानले आणि घड्याळ्यासारखे पुढे जाताना कुठल्या जवळच्या क बिंदूशी जोडणी (१-प) या संभाव्यतेने, तर कुठल्या ही इतर यादृच्छिक पद्धतीने निवडलेल्या बिंदूशी जोडणी 'प' संभाव्यतेने केल्यास सर्व बिंदूचे एकमेकांना जोडण्याचे सरासरी अंतर 'प'चे मूल्य वाढू लागल्यास झपाट्याने कमी होते. दुसरी संकल्पना समूह गुणांक (क्लस्टरिंग कोएफिशियन्ट) काढणे. म्हणजे संपूर्ण जालकात कुठल्याही जवळच्या बिंदूना जोडू शकणाऱ्या सर्व साखळ्या व प्रत्यक्षात अशा किती साखळ्या आहेत यांचा भागाकार करणे. या संकल्पनांचा वापर करून मोठ्या आकाराच्या जालकातील जोडणी संबंधीची उत्तरे मिळू शकतात. उदाहरणार्थ, 'प' या परिमेय संख्येत जोडण्या बदलल्या तर समूह गुणांक $(१-प)^३$ या प्रमाणात कमी होतो. अर्थातच या सर्व संकल्पना गणित व संख्याशास्त्रातील अनेक पद्धतींचा वापर करून मांडल्या गेल्या आहेत. (ते गणित काहीसे जटील व प्रगत स्वरूपाचे असल्यामुळे पूर्ण तपशीलात इथे दिलेले नाही) थोडक्यात म्हणजे यादृच्छिक जालकापेक्षा संपूर्ण लघु-जगत जालकाचे सरासरी अंतर लहान असते, पण समूह गुणांकात फारसा फरक पडलेला नसतो.

लघु-जगत जालक कसे निर्माण होते किंवा करता येऊ शकते याची कल्पना आकृती १ वरून लक्षात येईल. आकृती १(अ) मध्ये एक सामान्य जालक आहे ज्यातील प्रत्येक बिंदू शेजारच्या व जवळच्या मिळून एकूण तीन बिंदूशी जोडण्यांनी (लिंक्स) जोडलेला आहे. आकृती १(ब) मध्ये काही

बिंदूची अशी एक जोडणी काढून स्वैरपणे दूरच्या एका बिंदूला जोडण्यात आली आहे, तर आकृती १(क) मध्ये मूळ जोडण्या तशाच ठेवून काही दूर-दूर असलेल्या बिंदूना जोडण्याऱ्या अतिरिक्त जोडण्या घालण्यात आल्या आहेत. आकृती १(ब) आणि १(क) लघु-जगत जालके आहेत. त्याच प्रमाणे काही अतिरिक्त बिंदू घालणे व त्यांना उपलब्ध बिंदूपैकी काही बिंदूशी जोडणे, तसेच काही बिंदू व त्याच्या जोडण्या काढून टाकणे. अशा प्रकारे ही लघु-जगत जालके निर्माण होतात, किंवा करता येतात. उदाहरणार्थ, रस्ते व रेल्वेची जालके.



आकृती १ : सामान्य आणि लघु-जगत जालके

बिन-परिमाणाचे जालक

या पूर्वी संपूर्ण जालक हे यादृच्छिक पद्धतीने जोडल्यास (रँडम नेटवर्क) काय गुणधर्म प्राप्त होतील याबाबतीत पी. एरडॉश आणि ए. रेनी यांच्या १९५९ मधील शोधलेखाचा आधार सहसा घेतला जात होता. त्यांच्या गणिती विश्लेषणानुसार बिंदूच्या जोडण्यांची घनता संख्याशास्त्रातील पॉयसों वितरणानुसार प्राप्त होते. मात्र १९९८ मध्ये संकेतस्थळावरील पृष्ठांच्या (वेब पेजेसच्या) जाळ्यांच्या व त्यांच्या जोडणीचा (लिंकस्) अभ्यास असे दाखवतो की ८०% हून अधिक पृष्ठांना ४ जोडण्या तर १%हून कमी पृष्ठांना १००० हून अधिक जोडण्या आहेत. म्हणेजच अशा जालकाला कुठलेही परिमाण नसते (स्केल-फ्री जालक). अशा जोडण्या प्रत्यक्षात पॉयसों वितरणाऐवजी 'शक्ती नियम' (पॉवर लॉ) प्रमाणे कार्यरत असतात. गणिती भाषेत अशा जालकातील कुठलाही बिंदू इतर क बिंदूंशी जोडला असण्याची संभाव्यता (१/$क^{न}$) आणि न चे मूल्य २च्या जवळपास असते. निसर्गातील अनेक संरचना आणि घटना शक्ती नियमाप्रमाणे काम करतात हे विशेष. उदाहरणार्थ, भूकंपाचे हादरे.

सदर प्रकारची बिन-परिमाणाची जालके ही लघु-जगत जालके असतात कारण त्यांचा समूह गुणांक मोठा असतो आणि त्यांचा व्यास (पूर्ण जालकातील दोन बिंदूना जोडणारी जास्तीत जास्त लांबी) बिंदूच्या संख्येचा लॉगेरिथम अशा प्रकारे संबधित असतो. तसेच ही जालके बिंदू व जोडण्या वाढवणे किंवा कमी करणे असे बदल सामावून घेतात, जे पूर्वीच्या यादृच्छिक जालकात (रँडम नेटवर्कमध्ये) शक्य नव्हते.

निवडक उदाहरणे

आपल्या दैनिक व्यवहारातील अनेक बाबी विविध प्रकारच्या जालकांवर अवलंबून आहेत. उदाहरणार्थ, रस्ते, विद्युत पुरवठा, आणि माल ने-आण व त्याची वितरण व्यवस्था. उल्लेखनीय बाब म्हणजे अशी बहुतेक आकाराने मोठी जालके बिन-परिमाण किंवा लघु-जगत स्वरूपात मोडतात. त्यांची विविधता दाखवणारी निवडक उदाहरणे तक्ता १ मध्ये दिली.

तक्ता १ : निवडक लघु-जगत जालके

जालक	बिंदू	जोडण्या
इंटरनेट	राऊटर्स	केबल्स व अन्य प्रकारच्या जोडण्या
वर्ल्डवाइड वेब	वेब पृष्ठे	पत्ते (यूआरएल्स)
प्रोटीन्स नियमन	प्रोटीन्स	प्रोटीन्समधील प्रक्रिया
विमान वाहतुक	विमानतळ	हवाई मार्ग
वैज्ञानिक सहकार्य	वैज्ञानिक	सहलेखित शोध लेख
सिनेमासृष्टी	अभिनेता/अभिनेत्री	एकाच सिनेमात भूमिका केलेले

वरील वर्णनावरून लक्षात आले असेल की लघु-जगत जालकात काही बिंदू केन्द्र किंवा उपकेन्द्र (हब) या प्रकारची भूमिका बजावतात. म्हणजे जालकातील अनेक बिंदू अशा बिंदूना जोडून समूह तयार करतात. ह्या कलाचे किंवा गुणधर्माचे फायदे व तोटे हे विचारात घेतले पाहिजेत. एक फायदा म्हणजे केन्द्र नसलेल्या काही बिंदू व त्यांच्या जोडण्या नीट कार्य करत नसल्या तरी

एकूण जालकाच्या क्षमतेवर फारसा परिणाम होत नाही, पण केन्द्र वा उपकेन्द्र बिंदू कार्यक्षम नसल्यास संपूर्ण व्यवस्थेवर विपरित परिणाम होऊ शकतो. उदाहरणार्थ, अशा महत्त्वपूर्ण बिंदूवर आक्रमण करून वाहतूक व्यवस्था बंद पाडता येऊ शकते. तथापि काही बाबतीत याचा विपरितपणे फायदा घेता येऊ शकतो. तो म्हणजे कर्कपेशी किंवा इतर अवांछनीय पेशींचे केन्द्र किंवा उपकेन्द्र औषधे किंवा इतर मार्गानी उद्ध्वस्त केल्यास रोगापासून मुक्तता लवकर मिळू शकते. त्याचप्रमाणे एडस् किंवा रोग प्रतिबंधक लसी व इतर उपाय भविष्यात काही विशिष्ठ प्रादेशिक भागात प्रथम वापरले गेल्यास त्या रोगांचा फैलाव होण्यास अटकाव करता येईल. मात्र काही वेळा अनेक औषध कंपन्या आपली औषधे निवडक प्रसिद्ध आणि अनेक संस्था व व्यावसायिकांशी संबधित अशा डॉक्टरांनी वापरावी आणि त्याद्वारे इतरांनी वापरावी अशी त्यांच्यामार्फत तजवीज करतात. अशा सर्व बाबींचे गणित लघु-जगत जालकाच्या विश्लेषणातून मांडणे आता शक्य आहे.

निसर्गातील मुंग्याचे वारूळ आणि एकूण कार्यपद्धती लघु-जालकाच्या तंत्राने राबवली जात असल्याचे आढळते. तिथे सर्व कामांची विविध गटात विभागणी केली जाते. पूर्ण क्षमतेने काम पार पाडण्यासाठी एका कामासाठी एक, असा मुंग्यांचा समूह फक्त आपसात संपूर्ण संपर्क ठेऊन, काम करतो. मात्र, त्यातील फक्त एक मुंगी सहसा दुसऱ्या एका समूहातील कुठल्या एका मुंगीशी मधूनमधून संपर्क करते. या प्रकारे समूहांचा एकमेकांशी अगदी मर्यादित प्रमाणात संपर्क असतो. मात्र कुठल्याही समूहाला काही नवी किंवा अनपेक्षित समस्या आली तर त्या मर्यादित संपर्क जोडण्यांचा वापर करून अन्य समूहांकडून सल्ला मिळवला जातो. बहुराष्ट्रीय कंपन्या याचप्रमाणे व्यवस्थापन राबवण्याचा प्रयत्न करतात. विद्यापीठातील संशोधनाचा प्रसार होण्यासाठी देखील विद्यापीठे, वैज्ञानिक संस्था, उद्योग आणि शासन यांच्यात अशा लघु-जगत जालकाने समन्वय स्थापन केल्यास सर्वांना फायदा मिळू शकतो. भारतात अशा औपचारिक संपर्काचा अभाव प्रकर्षाने आढळतो. काही आणीबाणीच्या प्रसंगी याचा वापर झालेला आहे (उदा. २६ जुलै २००५ रोजी मुंबईत अतिवृष्टीने झालेल्या परिस्थितीत), पण गरज आहे ती सातत्याने जाणीवपूर्वक अनुभव व ज्ञान यांचे आदान-प्रदान करण्याची.

कुठलेही प्रत्यक्ष जालक लघु-जगत स्वरूपाचे आहे किंवा नाही हे तपासणे महत्त्वाचे ठरते, कारण त्यावरून एकूण व्यवस्थेच्या कार्याबाबत अंदाज

लावता येतो. काही वेळा जालकाला लघु-जगत प्रकारचे बनवणे तर काही वेळा ते बदलणे सोईचे ठरू शकते. या संदर्भात केन्द्र किंवा उपकेन्द्राना किती बिंदू जोडले आहेत एवढी गणिती माहिती व त्यावर आधारित प्रक्रिया पुरेशा नसतात. त्यांच्या जोडण्या किती प्रमाणात अथवा वारंवारतेने प्रत्यक्षात वापरल्या जातात हे ही अतिशय महत्त्वाचे ठरते. त्याचे गणित ही अर्थात मांडता येते.

लक्षणीय क्षमता

लघु-जगत जालकांचा गणिती अभ्यास सुरू होऊन केवळ पंधरा वर्षेच लोटली आहेत, पण त्या संदर्भात भरपूर शोधलेख भौतिक विज्ञान व गणिताच्या अनेक जर्नल्समध्ये प्रसिद्ध झाले आहेत. तसेच जीव विज्ञान आणि सामाजिक विज्ञान यांना वाहिलेल्या साहित्यात (मुद्रित व अंकीय) याबाबत विपुल माहिती आणि उपयोजनाचे तपशील उपलब्ध आहेत. माणसाच्या मेंदूतील न्यूरॉन्सचे जाळे, शरीरातील अन्न रसग्रहण प्रक्रिया (मेटाबोलिझम्), सामाजिक बांधिलकी आणि निसर्ग व पर्यावरणातील विविध जाळ्यांचा एकात्मक अभ्यास करण्यासाठी या गणिती साधनांचा वापर बराच उपयुक्त ठरू शकतो. उदाहरणार्थ, निसर्गातील अन्नचक्र अबाधित राखणे ते वाहतुक व्यवस्थेतील खोळंबा कमी करणे असे महत्त्वपूर्ण पैलू लघु-जगत जालकाच्या गणिताद्वारे अभ्यासणे उपयुक्त ठरू शकते. त्यामुळे इष्टतम धोरणे आखणे आणि योग्य निर्णय व पावले उचलण्यास हातभार लागू शकतो. तरी या नवीन गणिती विषयाकडे संशोधक व विद्यार्थी वर्गाने चौकसपणे लक्ष द्यावे आणि योगदान करावे असे सुचवण्यात येते.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

⌘⌘⌘

१५

गाठीत बांधलेले गणित

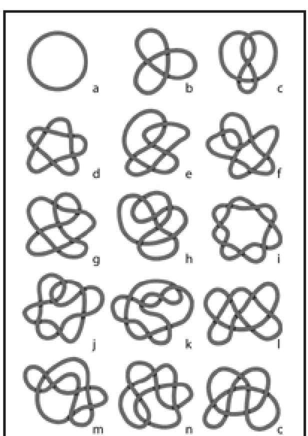
आपल्या दैनिक आयुष्यात अगदी साध्या बुटाच्या नाड्या बांधणे व दाट केस विंचरणे ते उच्च वैचारिक व भावनिक पातळीवरील अनेक बाबीत गाठ आणि गाठींचा संबंध येतो. उदाहरणार्थ, गाठी-भेटी माणसा-माणसातील आपुलकी दृढ करतात, या माणसापासून सावध असा कारण तो पक्का आतल्या गाठीचा आहे, या गाठी सातजन्माच्या असल्यामुळे सहजपणे तुटणार नाहीत, इत्यादी. गाठीची एक प्राचीन ग्रीक आख्यायिका ही प्रसिद्ध आहे. अशी आकाशवाणी झाली की फ्रागिया (आता तुर्कीत आहे) राज्याचा नवा राजा म्हणजे दुसऱ्या दिवशी सकाळी बैलगाडीतून राजधानीत प्रवेश करणारी पहिली व्यक्ती असेल. गोर्डीयस नावाचा एक शेतकरी योगायोगाने असा माणूस ठरला, व त्याला राजा बनवण्यात आले. देवाचे आभार मानण्याकरता त्याने आपली बैलगाडी देवळाच्या बाहेर खांबाला दोरखंडाच्या एका आगळ्यावेगळ्या गाठीने बांधून टाकली. ती गाठ सोडवणे कोणालाही जमत नव्हते. तेव्हापासून खूप कठीण कामाला 'गोर्डीयनची गाठ सोडवणे' असा वाक्प्रचार सुरू झाला. ती गाठ जो सोडवेल तो जगाचा राजा होईल असे नंतर भाकीत करण्यात आले. पुढे शिकंदर म्हणजे अलेक्झांडर-द-ग्रेटने (इ.स. पूर्व ३५६-३२३) ही गाठ इ.स. पूर्व ३३३ मध्ये सोडवली व तो नंतर जगाचा (त्यावेळी ज्ञात) राजा ही झाला, पण ते राज्य तो उपयोगू शकला नाही कारण त्याने गोर्डीयनची गाठ हाताने सोडवण्याऐवजी तलवारीने कापून सोडवली होती !

गणिती अभ्यास प्रारंभ

मात्र गाठींचा अभ्यास करून त्यांचे गणित पहिल्यांदा ए-टी. व्हेन्डरमाँड (१७३५-९६) या फ्रेंच गणितज्ञाने १७७१ साली लिहिलेल्या शोध निबंधाद्वारे पुढे आले. स्थानाची भूमिती अभ्यासण्यासाठी गाठीचा उपयोग करता येईल असे त्याने मांडले. पुढे त्याचा शास्त्रोक्त अभ्यास सी. एफ. गौस या जगप्रसिद्ध गणितज्ञाने केला व 'गाठ सिद्धांत' (नॉट थेयरी) ही मूलभूत गणिताची एक शाखा म्हणून अस्तित्वात आली. तिचा उपयोग १८६० मध्ये लॉर्ड केल्विन (१८२४-१९०७) याने पदार्थाची सूक्ष्म स्तरावर संरचना कशी असते याचा सिद्धांत मांडण्यासाठी केला. जरी तो सिद्धांत पुढील संशोधनाने फोल ठरवला तरी गाठीच्या सिद्धांतावर खूप गणिती काम होण्यास त्यामुळे चालना मिळाली.

गाठींचे वर्गीकरण

गणिताच्या दृष्टिने गाठींचे वर्गीकरण करणे हे फार महत्त्वाचे काम आहे, आणि त्या संदर्भात पी. जी. टेट (१८३१-१९०१) याने केलेले योगदान लक्षणीय आहे. गणिती गाठ म्हणजे एक वक्र रेषा जिला सुटी टोके नसतात. काही गणिती गाठींचे प्रकार आकृती १ मध्ये दाखवले आहेत. ही आकृती म्हणजे त्रिमितीतील गाठींची पृष्ठ भागावर पाडलेली छायाचित्रे आहेत. पहिल्या ओळीतील दुसरे चित्र ३ गाठी तर त्या पुढचे चित्र ४ गाठी दाखवते.



आकृती १

गणितामध्ये एक गाठ दुसऱ्या गाठीशी समतुल्य आहे का, म्हणजेच एक गाठ दुसऱ्या गाठीत ती न कापता किंवा तिच्यातून न ढकलता परावर्तित करता येईल का हा मुख्य प्रश्न केला जातो. असा गणिती परिवर्तनांचा अभ्यास, कुठल्या गाठी याप्रकारे समतुल्य आहेत किंवा नाही हे ओळखण्याच्या पद्धती विकसित करतो.

क्षेत्रविद्या (टोपोलोजी) ही एक व्यापक अशी गणिती शाखा एकोणिसाव्या शतकाच्या मध्यात उदयास आली आणि गाठ सिद्धांत हा त्याचा एक नैसर्गिक भाग ठरला. तरीसुद्धा गाठ सिद्धांतावर स्वतंत्रपणे काम हळूहळू होतच राहिले. गाठीत कसे ही परिवर्तन केले तरी तिचे न बदलणारे गुणधर्म कोणते (इन्व्हेरीयंट) हे शोधणे प्रामुख्याने केले जात होते. या तपासात १९२८ मध्ये अमेरिकन गणितज्ञ जे. डब्ल्यू. अलेक्झांडर (१८८८-१९७१) यांनी विकसित केलेले बीजगणितीय बहुपदी सूत्र, ज्याला आता 'अलेक्झांडर पॉलिनोमिअल' म्हणतात, हे फार महत्त्वाचे ठरले. ते सूत्र परिपूर्ण करणे व त्याचा विस्तार करणे असे गणिती संशोधन पुढील चार दशके चालू राहिले.

१९६० च्या दशकाच्या शेवटी जे. एच. कॉनवे या अमेरिकन गणितज्ञाने गाठींना गणिती पद्धतीने सोडवण्याची एक नवी रित शोधून काढली ज्यामुळे अलेक्झांडर पॉलिनोमिअलची उपयुक्तता तसेच त्याच्या मर्यादा आणखीन स्पष्ट झाल्या. १९८४ मध्ये एक वेगळ्याच आणि अतिशय अमूर्त अशा व्हॉन न्यूमान बीजगणितात संशोधन करणाऱ्या व्ही. जोनस् याने एक नवीन बहुपदी सूत्र शोधले जे गाठ सिद्धांतातील वर म्हटलेल्या अलेक्झांडर पॉलिनोमिअलपेक्षा सखोल ठरले. अर्थातच त्याला जोनस् पॉलिनोमिअल म्हटले जाते. या सूत्रामुळे गाठ सिद्धांताचा गणित व भौतिक विज्ञानातील अनेक शाखांशी संबंध परत एकदा जुळून आला. वरील दोन सूत्रांना एकत्र करणारे 'एचओएमएफएलवायपीटी' नावाचे एक व्यापक सूत्र त्यानंतर विकसित करण्यात आले. आतापर्यंत १७,०१,९३६ वेगवेगळ्या गणिती गाठींचे वर्गीकरण करण्यात आलेले आहे.

आधुनिक उपयोग

गाठीच्या सिद्धांताचे असे प्रगत झालेले गणित डीएनए, जे की पेशी निर्माण करणाऱ्या जनुकाचा प्रमुख घटक आहे, त्याच्या मोलेक्यूलची संरचना जी लाखो एकमेकाला वळसा घालणाऱ्या पदार्थांनी बनलेली असते तिच्या विश्लेषणासाठी उपयुक्त ठरले आहे. त्या विविध गाठी सोडवणे व नंतर परत

बांधणे हे शरीरातील महत्त्वपूर्ण काम विकर (एन्झाइम्स) करत असतात. वर उल्लेख केलेली कॉनवेची गाठींना सोडवण्याची पद्धत ही प्रक्रिया समजण्यास उत्तम प्रकारे मदत करते. विकरने अशी निर्माण केलेली डीएनएची एक गाठ आकृती २ मध्ये दाखवली आहे (हे चित्र इलेक्ट्रॉन मायक्रोस्कोपने काढलेले आहे).



आकृती २

त्याचप्रमाणे हल्ली पदार्थ विश्वाची मूलभूत संरचना-घटक शोधण्यासाठी विकसित केला जात असलेल्या 'स्ट्रिंग' सिद्धांत आणि गाठीचा सिद्धांत यांना जोडणारे दुवे सापडले आहेत. अणु-परमाणुच्या अंतरंगाची रचना समजण्यास १८६० नंतर परत गाठ सिद्धांताचा वापर आता होत आहे ही बाब आश्चर्यचकित करते. तरी गाठीच्या सिद्धांत या क्षेत्रात संशोधनाला बराच वाव आहे.

गाठीच्या सिद्धांताबाबत विपुल साहित्य उपलब्ध आहे जे त्याचे विविध पैलू दाखवते. गाठीच्या सिद्धांताचा हा प्रवास गणिताची अमूर्त आणि उपयोजन या दोन्ही बाजू एकमेकाला कशा पूरक आहेत हे दाखवतो. तसेच अगदी क्षुल्लक वाटणाऱ्या गोष्टीत ही प्रभावशाली गणित कसे सामावलेले आहे याची कल्पना येते. गणितात संशोधन आणि त्याचबरोबर अशा संशोधनाचे निष्कर्ष इतर विषयांतील समस्यांशी कसे जोडता येतील याकडे लक्ष देणे त्यामुळे उपयुक्त ठरेल.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

१६

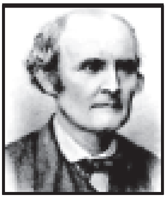
मॅट्रिक्स म्हणजे सारणीत सामावलेले सक्षम गणित

अंकगणितात बेरीज आणि गुणाकार करताना संख्यांचा क्रम कसा ही असला तरी उत्तरात फरक पडत नाही. मात्र काही वेळा अंक आणि संख्या एखादी विशिष्ट संरचना दाखवतात, अशा वेळी त्यांच्यावर संयुक्तपणे सदर गणिती प्रक्रिया करून तर्कशुद्ध उत्तर काढणे आवश्यक असते. पण त्यांची उत्तरे आपल्या नेहमीच्या विचारांना छेद देऊ शकतात. याबाबत जे. सिल्व्हेस्टर याने ''ऑन अ न्यू क्लास ऑफ थेरम्स'' या आपल्या १८५० मध्ये प्रसिद्ध झालेल्या एका लेखात संव्यूह किंवा सारणी म्हणजेच मॅट्रिक्सची कल्पना मांडली आणि मॅट्रिक्स बेरीज व वजाबाकी करण्याच्या पद्धती सुचवल्या. एका अर्थाने सारणी किंवा मॅट्रिक्स-बीजगणिताची सुरुवात त्यामुळे झाली. ए. कॅले या गणितज्ञाने त्यात मॅट्रिक्स गुणाकार व आणखी बरीच भर घालून त्याची उपयोगिता विविध क्षेत्रात कशी आहे या संबंधी मोलाचे काम केले. तरी आपण इथे सारणीच्या गणिताची थोडक्यात ओळख करून त्याचे निवडक उपयोजन बघुया.



जेम्स सिल्व्हेस्टर (१८१४-१८९७) हा एक महत्त्वपूर्ण ब्रिटिश गणितज्ञ होऊन गेला. शैक्षणिक कारकीर्द उत्तम असून ही तो धर्माने ज्यू असल्यामुळे केम्ब्रिज विद्यापीठाने त्याला पदवी दिली नाही. त्याने बरेच वर्षे वकीली केली, अमेरिकेत ही अध्यापन केले व तेथे एक गणिताचे जर्नल सुरू केले. लंडन मधील रॉयल सोसायटीने वैज्ञानिक योगदानासाठीचे तिचे सर्वोच्च मानाचे कोप्ले पदक सिल्व्हेस्टरला १८९१ मध्ये बहाल करून त्याच्या

संशोधनाचा गौरव केला. ती संस्था १९०१ पासून गणितात उत्तम संशोधनाला प्रोत्साहन देण्यासाठी सिल्व्हेस्टर पदक हे त्याच्या स्मृतीप्रित्यर्थ देते हे विशेष.



ब्रिटेन मधील आर्थर कॅले (१८२१-१८९७) हा उपजत गणितज्ञ होता. त्याचे शिक्षण ट्रिनीटी कॉलेज, केम्ब्रिज येथे झाले. दैदीप्यमान अशी शैक्षणिक कारकीर्द असून ही नोकरी न मिळाल्यामुळे त्याने १८४९ पासून वकीली पेशा पत्करला. त्यात कॅलेला भरपूर पैसा आणि यश मिळू लागले. मात्र त्याने वकीली बरोबरच आपले गणिती संशोधन चालू ठेवून २५० शोध लेख लिहिले ही एक आश्चर्याची बाब आहे. त्याने सिल्व्हेस्टर सोबत मॅट्रिक्स बीजगणितात मूलभूत काम केले व तसेच गणिताच्या अन्य शाखांत ही योगदान केले. क्रेम्ब्रिज विद्यापीठाने १८६३ मध्ये 'गणितज्ञ' असे एक खास पद निर्माण करून ते कॅलेला देऊ केले. आर्थिकदृष्ट्या त्या पदाचा पगार त्यास वकीलीतून मिळणाऱ्या पैशाच्या तुलनेत अगदी कमी होता, पण कॅलेने ते पद स्वीकारले आणि शेवटपर्यंत तो गणितात कार्यरत राहिला. मुख्य म्हणजे गणिताचा प्रसार व समाजात त्याची जागरूकता व्हावी म्हणून त्याने बरेच काम केले आणि अतिरिक्त ६५० लेख प्रसिद्ध केले. या वरून त्याची गणिताबाबतीतील तळमळ दिसून येते.

संकल्पना आणि प्राथमिक गणिती प्रक्रिया

सारणी किंवा मॅट्रिक्स ही कुठल्याही प्रकारच्या अंकांच्या सरळ ओळी आणि उभे स्तंभ या प्रकारची रचना असते आणि ओळी आणि स्तंभ यांची संख्या किती ही असू शकते. सर्व ओळी आणि स्तंभांना एका मोठ्या चौकोनी कंसात समाविष्ट केले जाते. उदाहरणार्थ, खालील अ सारणीत तीन ओळी व चार स्तंभ आहेत म्हणून तिला ३ x ४ अनुक्रम (ऑर्डर) ची सारणी म्हणतात.

$$\text{अ} = \begin{bmatrix} \text{३} & -\text{१} & \text{०} & \text{१३} \\ \text{५} & \text{२} & \text{८} & -\text{३} \\ \text{७} & \text{५} & \text{१/३} & \text{४} \end{bmatrix}_{\text{३ x ४}}$$

सारणीचे व्यापक रूप असे आहे :

$$अ = \begin{bmatrix} अ_{११} & अ_{१२} & \cdots & अ_{१न} \\ अ_{२१} & अ_{२२} & \cdots & अ_{२न} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ अ_{म१} & अ_{म२} & \cdots & अ_{मन} \end{bmatrix}_{म \times न}$$

जर ओळी आणि स्तंभ संख्येने समान असतील तर त्या सारणीला *वर्ग* सारणी म्हणतात. दोन सारणीतील ओळी व स्तंभ यांची संख्या तसेच त्यांच्या प्रत्येक स्थानावरील अंक तेच असतील तर त्या सारणी *सम* आहेत असे मानले जाते.

बेरीज : दोन सारणींची बेरीज करण्यासाठी त्या दोघांचा अनुक्रम सारखा असणे आवश्यक असते. तसे असल्यास अनुक्रमे स्थानावरील अंकांची बेरीज करून नवीन सारणी मिळते.

उदाहरणार्थ,

$$अ = \begin{bmatrix} ३ & ४ & ० \\ १ & -२ & ७ \end{bmatrix}_{२ \times ३}, \quad ब = \begin{bmatrix} ११ & -२ & १ \\ ९ & ३ & ३ \end{bmatrix}_{२ \times ३}$$

यांचा अनुक्रम २ x ३ असा सारखा असल्यामुळे त्यांची बेरीज केलेली सारणी अशी असेल :

$$क = अ + ब = \begin{bmatrix} ३+११ & ४+(-२) & ०+१ \\ १+९ & -२+३ & ७+३ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} १४ & २ & १ \\ १० & १ & १० \end{bmatrix}_{२ \times ३}$$

वजाबाकी : दोन सारणींची वजाबाकी करण्यासाठी दोघांचा अनुक्रम सारखाच पाहिजे आणि तसे असल्यास अनुक्रमे स्थानावरील अंकांची वजाबाकी करून नवीन सारणी मिळते. वरील उदाहरणातील सारणींची वजाबाकी बघु या.

$$ड = अ - ब = \begin{bmatrix} ३-११ & ४-(-२) & ०-१ \\ १-९ & -२-३ & ७-३ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -८ & ६ & -१ \\ -८ & -५ & ४ \end{bmatrix}_{२ \times ३}$$

गुणाकार : दोन सारणींच्या गुणाकारांसाठी पहिल्या सारणीतील स्तंभांची संख्या आणि दुसऱ्या सारणीतील ओळींची संख्या सारखी असणे आवश्यक आहे, अन्यथा सारणींचा गुणाकार करता येत नाही. पहिल्या सारणीच्या पहिल्या ओळीतील अंकांना दुसऱ्या सारणीतील पहिल्या स्तंभातील अनुक्रमे अंकाने गुणून त्याची बेरीज करून नवीन सारणीतील प्रथम ओळ आणि प्रथम स्तंभ या स्थानावरील अंक प्राप्त करायचा आणि ही पद्धत सर्व ओळी आणि स्तंभासाठी वापरून सारणींचा गुणाकार संपन्न होतो. वरील उदाहरणातील अ आणि ब सारणींचा गुणाकार करणे शक्य नाही कारण अ चे स्तंभ ३ तर ब मध्ये २ ओळी आहेत. गुणाकारासाठी आपण खालील प्रमाणे दोन वेगळ्या सारणी घेऊ ज्या स्तंभ–ओळीच्या अनुक्रमाची अट पाळतात.

$$\text{प} = \begin{bmatrix} १ & ० & ४ \\ २ & १ & १ \\ ३ & १ & ० \\ ० & २ & २ \end{bmatrix}_{४ \times ३}, \quad \text{फ} = \begin{bmatrix} २ & ४ \\ १ & १ \\ ३ & ० \end{bmatrix}_{३ \times २}$$

तरी

$$\text{भ} = \text{प} \times \text{फ} = \begin{bmatrix} (१ \times २ + ० \times १ + ४ \times ३) & (१ \times ४ + ० \times १ + ४ \times ०) \\ (२ \times २ + १ \times १ + १ \times ३) & (२ \times ४ + १ \times १ + १ \times ०) \\ (३ \times २ + १ \times १ + ० \times ३) & (३ \times ४ + १ \times १ + ० \times ०) \\ (० \times २ + २ \times १ + २ \times ३) & (० \times ४ + २ \times १ + २ \times ०) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} १४ & ४ \\ ८ & ९ \\ ७ & १३ \\ ८ & २ \end{bmatrix}_{४ \times २}$$

एक फार महत्त्वाची गोष्ट म्हणजे दोन सारणींचा गुणाकार करणे शक्य असल्यास गुणाकार करताना त्यांचा क्रम जर बदलला तर येणारी उत्तरे *भिन्न* असू शकतात.

उदाहणार्थ,

$$\text{स} = \begin{bmatrix} १ & १ \\ २ & १ \end{bmatrix}_{२ \times २}, \quad \text{ट} = \begin{bmatrix} २ & १ \\ १ & १ \end{bmatrix}_{२ \times २}$$

वरील गुणाकाराची पद्धत वापरून,

$$स \times ट = \begin{bmatrix} ३ & २ \\ ५ & ३ \end{bmatrix}_{२ \times २} \quad \text{आणि} \quad ट \times स = \begin{bmatrix} ४ & ३ \\ ३ & २ \end{bmatrix}_{२ \times २}$$

अशी उत्तरे मिळतात आणि त्यावरून स × ट ≠ ट × स असे दिसून येते. गणिती भाषेत सारणींचा गुणाकार क्रमपरिवर्ती (कम्युटेटिव्हीटी) नियम पाळेलच असे नसते. अंकांच्या नेहमीच्या गुणाकारापेक्षा सारणींचा गुणाकार बराच वेगळा आहे असे लक्षात येईल. काही उपयोजनांत हा क्रमपरिवर्ती नियम पाळणे किंवा न पाळणे महत्त्वाचे ठरू शकते.

भागाकार : दोन सारणींचा सामान्य अंकाप्रमाणे भागाकार शक्य नसतो. दिलेल्या सारणीचा प्रतिचर किंव प्रतिलोम (इन्व्हर्स) काढणे मात्र शक्य असते. प्रतिचर काढण्यासाठी सारणी ही वर्ग सारणी (ओळी व स्तंभांची संख्या समान) असणे आवश्यक असते. तसेच सारणी आणि त्याच्या प्रतिचराचा गुणाकार कसा ही केल्यास उत्तरात प्राप्त झालेली सारणी नित्यसमिका (आयडेन्टीटी) सारणी असली पाहिजे, म्हणजे जिच्यातील पहिल्या स्थानापासून खाली दरवेळी उजवीकडे एक घर सरकत शेवटपर्यंत गेल्यास त्या कर्णावर फक्त १ आणि बाकी सर्व स्थलांवर ० हा अंक असतो. तसेच सारणीत सर्व अंक ० असणे किंवा दोन ओळी किंवा स्तंभ समान असणे ह्या स्थितीत सारणीचा प्रतिचर काढणे शक्य नाही. प्रतिचर सारणी तयार करणे ही प्रक्रिया जरी गुंतागुंतीची असली तरी सारणीच्या विविध उपयोजनांत अशी सारणी फार महत्त्वाची भूमिका पार पाडते. अर्थातच मोठ्या अनुक्रमाच्या सारणीसाठी संगणकाचा वापर करून असे करणे सहजपणे जमते. गणिती तपशीलात न जाता आपण खालील (ज) सारणीसाठी प्रतिचर सारणी ($ज^{-१}$) कशी आहे ते बघुया.

$$ज = \begin{bmatrix} २ & ३ & ४ \\ १ & ० & २ \\ ३ & ४ & ८ \end{bmatrix}_{३ \times ३} \quad \text{तर } ज^{-१} = \begin{bmatrix} \frac{४}{३} & \frac{४}{३} & -१ \\ \frac{१}{३} & -\frac{२}{३} & ० \\ -\frac{२}{३} & -\frac{१}{६} & \frac{१}{२} \end{bmatrix}_{३ \times ३}$$

आपण हे बघू शकतो की,

$$ज \times ज^{-१} = ज^{-१} \times ज = \begin{bmatrix} १ & ० & ० \\ ० & १ & ० \\ ० & ० & १ \end{bmatrix}_{३ \times ३}$$

टीप : सारणी $ज^{-१}$ चा अर्थ (१/ज) असा अंकाप्रमाणे घेऊ नये.

सारणीच्या इतर अनेक गणिती विशेषता व प्रक्रिया आहेत त्यांचा उपयोग वेगवेगळ्या प्रकारे होतो. आपण आता सारणींचे निवडक वापर बघुया.

संसाधनांचे इष्टतम वितरण

उपलब्ध संसाधनांचे वितरण कसे करावे ज्यामुळे सर्वाधिक फायदा मिळेल किंवा उत्पादन अथवा सेवा पुरवठ्याचा खर्च किमान राहील असे प्रश्न व्यवस्थापनाला नेहमीच पडतात. याबाबत इष्टतम निर्णय घेण्यासाठी त्या प्रश्नाचे गणिती प्रारूप सरळरेषीय (लिनिअर) किंवा असरळरेषीय (नॉन-लिनिअर) प्रायोजन (प्रोग्रामिंग) करून केले जाते. ते गणिती प्रारूप सोडवून उत्तर काढण्यासाठी सारणीवरील प्रक्रिया कळीच्या ठरतात.

उदाहरण १ : कमाल फायदा मिळण्यासाठी दोन वस्तू किती प्रमाणात निर्माण करायच्या हा प्रश्न सोडवण्यासाठी घटक असे आहेत. पहिल्या वस्तूला दुसऱ्या वस्तूपेक्षा प्रति एकक दुप्पट कच्चा माल लागतो, तो जो एकूण १००० एकक दर दिवशी उपलब्ध आहे. दोन्ही वस्तू एकूण निर्माण करण्याची क्षमता दर दिवशी ८०० आहे. तसेच दर दिवशी पहिली वस्तू ४०० तर दुसरी ७०० हून अधिक निर्माण करणे शक्य नाही. पहिल्या वस्तूतून लाभ रु. ४ तर दुसऱ्या वस्तूतून तो रू. ३ प्रति एकक असा आहे.

आपण क्ष आणि ज्ञ ह्यांनी अनुक्रमे पहिली व दुसरी वस्तू संबोधली तर वरील प्रश्नाचे सरळरेषीय प्रायोजन प्रारूप असे आहे.

एकूण लाभ कमाल असावा : ४क्ष + ३ज्ञ

मर्यादा : २ क्ष + ज्ञ < = १००० (कच्चा माल उपलब्ध)

क्ष + ज्ञ < = ८०० (एकूण निर्मिती क्षमता)

क्ष < = ४०० (क्षमता मर्यादा)

ज्ञ < = ७०० (क्षमता मर्यादा)

क्ष, ज्ञ > = ० (नैसर्गिक मर्यादा)

(टीप : क <= १० म्हणजे क चे मूल्य १० किंवा त्याहून कमी असणे.) याचे सुटसुटीत सारणी स्वरूप असे आहे.

$$\text{एकूण लाभ : } [\text{४ ३}] \times \begin{bmatrix} \text{क्ष} \\ \text{ज्ञ} \end{bmatrix}$$

$$\text{मर्यादा : } \begin{bmatrix} \text{२} & \text{१} \\ \text{१} & \text{१} \\ \text{१} & \text{०} \\ \text{०} & \text{१} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{क्ष} \\ \text{ज्ञ} \end{bmatrix} <= \begin{bmatrix} \text{१०००} \\ \text{८००} \\ \text{४००} \\ \text{७००} \end{bmatrix}$$

$$\text{क्ष, ज्ञ} >= \text{०}$$

हा प्रश्न आकाराने लहान असल्यामुळे सारणीवरील प्रतिचर काढणे व इतर प्रक्रिया न करता ही आलेखाद्वारे इष्टतम उत्तर (क्ष = २००, ज्ञ = ६००) प्राप्त करता येईल. पण प्रत्यक्षात जहाज बांधणे, तेलशुद्धी कारखाना चालवणे, पोलाद निर्मिती अशा क्षेत्रात २००० निर्णय घटक-एकक व १०,००० मर्यादांचे घटक सहज असतात. अशा वेळी वरील प्रमाणे सारणी स्वरूपात मांडणी आणि सारणीचा प्रतिचर काढत उत्तर शोधून तो तपासत राहणे असे करणारी 'सिंप्लेक्स' पद्धती वापरली जाते. अर्थातच त्यासाठी संगणकाचा वापर अनिवार्य होतो. ह्या संपूर्ण पद्धतीचा गाभा सारणीच्या अंक गणित व बीजगणितात आहे हे विशेष.

धोरणाचा निर्णय

कुठल्या ही क्षेत्रातील स्पर्धा, तंटा, विवाद सोडवणे किंवा रणनिती तसेच कूटनिती ठरवणे यासाठी गेम थेयरी या एक गणिती उप-शाखेचा विकास झालेला आहे. समस्यायुक्त स्थितीला दर्शवण्यासाठी सारणीचा उपयोग करणे ही तिची एक प्रमाणित पद्धत आहे.

उदाहरण २ : अ आणि ब हे दोन विरोधी पक्ष आहेत व विवाद स्थितीत आहेत. खालील सारणीतील ओळी प्रत्येक पर्यायाचा अ ला होणारा लाभ (ऋण अंक म्हणजे तोटा) तसेच स्तंभ हे ब साठी त्या पर्यायांचे लाभ किंवा तोटे सापेक्षपणे दाखवतात.

		पक्ष – ब			किमान	कमाल(किमान)
		$ब_१$	$ब_२$	$ब_३$		
पक्ष–अ	$अ_१$	१	३	१	१	**१**
	$अ_२$	०	–४	–३	–४	
	$अ_३$	१	५	–१	–१	
कमाल		१	५	१		
किमान(कमाल)		**१**		**१**		

हा प्रश्न गणिती रूपात सरळ आणि लहान असल्यामुळे त्याचे उत्तर कमाल (किमान) व किमान (कमाल) या गेम थेयरीच्या सिद्धांताने काढता येते. त्याप्रमाणे अ पक्षाने $अ_१$ तर ब पक्षाने $ब_१$ किंवा $ब_३$ हे पर्याय वापरावे असा सल्ला मिळतो.

मात्र जर निर्णय घेण्याची स्थिती अनेक पर्याय आणि पक्ष ह्यांनी भरलेली असेल, जशी सहसा प्रत्यक्षात असते, तर अधिक प्रगत गणिती पद्धती वापरणे भाग पडते. मुख्य म्हणजे वरील सारणी–आधारित प्रश्नाची संरचना व लिनिअर प्रोग्रामिंगमध्ये घनिष्ट संबंध असल्यामुळे त्याच्या अनेकविध पद्धती वापरता येतात.

पत्र कुठे आहे ?

माल, साहित्य आणि दस्ताऐवज ह्यांची परिवहन व्यवस्थेद्वारे ने–आण करताना त्या अनेक वाहने, तपासणी नाके व वितरण कार्यालयातून जाणे सहसा आवश्यक ठरते. त्या प्रत्येक ठिकाणी त्या काही काळ राहणे किंवा गहाळ होणे असे घडू शकते. अशा परिस्थितीत पाठवलेल्या वस्तूची सद्यःस्थिती समजणे महत्त्वाचे असते. यासाठी मार्कोव्ह साखळी (चेन) ह्या गणिती संकल्पनेचा व प्रक्रियेचा उपयोग केला जाऊ शकतो. मार्कोव्ह साखळी संपूर्णपणे सारणीच्या गणितावर आधारलेली आहे. आपण त्याचा उपयोग पत्र बटवडा व्यवस्थेसाठी बघुया.

उदाहरण ३ : आपण मानुया की एक साधे पत्र भारतीय टपालाने कोल्हापूरहून मुंबईच्या पत्यावर टाकले आहे. त्याचा प्रवास असा असू शकतो : ते कोल्हापूर किंवा मुंबईच्या टपाल वितरण कार्यात राहिल्यामुळे उशीर होऊ शकतो, या दोन्हीपैकी कुठेही ते गहाळ होऊ शकते, वाहनातून मार्गस्थ असू शकते किंवा शेवटी मुंबईतील पत्यावर त्याचा बटवडा होऊ शकतो. या सर्व शक्यता खालील प या सारणीद्वारे दाखवता येऊ शकतात.

		अंत			
		हरवणे	पोहचणे	कोल्हापूर	मुंबई
प = प्रारंभ	हरवणे	१	०	०	०
	पोहचणे	०	१	०	०
	कोल्हापूर	१/८	१/८	१/२	१/४
	मुंबई	१/८	३/८	०	१/२

प सारणीतील पहिल्या दोन ओळी पत्र पोहचणे किंवा गहाळ होण्याच्या संभाव्यता (प्रोबेबिलिटी) दाखवतात. तिसरी ओळ ते पत्र अनुक्रमे त्याच दिवशी कोल्हापूरात गहाळ होणे, निघणे, पडून राहाणे किंवा मुंबईस जाणे याची संभाव्यता दाखवते.

पत्र बटवडा होण्याची व्यवस्था वरील सारणीत दाखवलेल्या संभाव्यतेप्रमाणे काम करत असेल तर एकूण पत्रातील पत्रे पोहचणे आणि गहाळ होणे याची टक्केवारी किती असेल, पत्र पोहचण्यास सरासरी किती वेळ लागत असेल, पत्रे कोल्हापूरात किंवा मुंबईत सहसा किती काळ अडकून राहातात, असे अनेक प्रश्न विचारले जाऊ शकतात.

वरील सारणीवर विविध प्रगत गणिती प्रक्रिया आणि मार्कोव्ह साखळीच्या सिद्धांताचा वापर करून कोल्हापूरात पत्र सरासरी दोन दिवस तर मुंबईत सरासरी एक दिवस पडून राहणे अपेक्षित आहे असे उत्तर मिळते.

(टीप : भारतीय टपाल खात्याच्या क्षमतेबद्दल या उदाहरणावरून निष्कर्ष काढू नये कारण वरील आकडे केवळ सोयीसाठी मानलेले आहेत.)

सारणीचे अफाट विश्व

ही निवडक उदाहरणे स्पष्टपणे सारणीच्या उपयोगाच्या कक्षा किती विस्तृत आहेत हे दाखवतात. गणित, विज्ञान आणि सामाजिक विज्ञान अशा विविध क्षेत्रात सारणीद्वारे गणिती प्रारूप (मॉडेल) सुबकपणे मांडून उत्तर शोधणे हे आता सर्रासपणे केले जाते. साधी एककालीन समीकरणे (साइमल्टेनिअस इक्वेशनस्) सोडवण्यापासून वैद्यकीय चित्रांकन (इमेजिंग), अणु-रेणु च्या संरचनेचे विश्लेषण, विद्युत प्रवाहांच्या जाळ्यांचे व्यवस्थापन, अर्थशास्त्र व

समाजशास्त्रातील अनेक संकल्पना मांडणे अशी विविध उदाहरणे या संदर्भात देता येतील. इकॉनोमेट्रिक्स ही अर्थशास्त्राची एक संपूर्ण शाखा मॅट्रिक्स किंवा सारणीवर बहुतांश उभारली गेली आहे. डब्ल्यू. हाइझेन्बर्ग आणि एम. बॉर्न यांनी १९२५ मध्ये सारणी आधारित मॅट्रिक्स मेकॅनिक्स हे विकसित करून भौतिकविज्ञानातील क्वांटम मेकॅनिक्स सिद्धांत पुढे नेण्यास महत्त्वाचे योगदान केले.

सारणी बीजगणिताचा अभ्यास सहसा महाविद्यालयीन गणिती पाठ्यक्रमात पहिल्या वर्षी समाविष्ट असतो. तरी विद्यार्थीवर्गाने तसेच संशोधकांनी देखील सारणीच्या गणिती प्रक्रिया समजणे आणि त्याबाबत नैपुण्य मिळवणे फार महत्त्वाचे ठरते. सारणी बीजगणित आणि त्याचे उपयोजन यासंबंधी विपुल प्रमाणात पुस्तके व अन्य साहित्य उपलब्ध आहे. आपल्या विश्वाच्या अतिसूक्ष्म ते विराट घटकांचा अभ्यास करण्यासाठी सारणीच्या प्रचंड गणिती सक्षमतेचा वापर अनिवार्य आहे हे सर्वमान्य झालेले आहे.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

⌘⌘⌘

१७

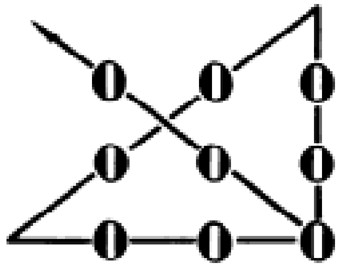
मनोरंजन आणि चित्रकलेचे गणित

गणिताचा उपयोग मंनोरंजनासाठी प्राचीन काळापासून होत आला आहे. अगदी गोळा आणि फुली पासून ते सापशिडी, व्यापार आणि बुद्धीबळ अशा सर्व खेळांत गणितातील अंक, आकृत्या, क्लुप्त्या आणि संकल्पनांचा समावेश असतो. काही वर्षांपूर्वी बाजारात आलेला रूबिक क्यूब व त्याचे विविध प्रकार गणिती विचारसरणीला पुढे नेण्याचे काम करतात. बरीचशी कोडी किंवा कूटप्रश्न हे भाषा आणि गणित यांच्या खास संबंधावर आधारलेले असतात.

उदाहरणार्थ, एका मेजाभोवती दोन वडील आणि त्यांची दोन मुले बसली होती. त्या मेजावर तीन संत्रे होती, मात्र प्रत्येकाच्या वाट्याला एक संपूर्ण संत्र आले. हे कसे शक्य आहे? चार व्यक्ती आणि तीन संत्री यांचा गणिती ताळमेळ बसत नाही. विचार केल्यावर असे लक्षात येते की मेजाभोवती एकूण तीनच व्यक्ती होत्या- आजोबा, त्यांचा मुलगा आणि नातू, त्यामुळे प्रत्येकाच्या वाट्याला एक पूर्ण संत्र आले. तात्पर्य, शब्दछल बुचकळ्यात घालणारा असतो, गणित नव्हे.

गणिती आकृत्या

गणितातील आकृत्याबाबतचे काही प्रश्न विचारांना नवीन दिशा देतात. उदाहरणार्थ आकृती १ मध्ये दाखवलेल्या नऊ गोळ्यांना फक्त चार सरळ रेषांनी व्याप्त करायचे व ते करताना एकाच रेषेवरून परत जाता कामा नये आणि पेन्सिल किंवा पेन कागदावरून उचलायचे नाही ह्या नियमांचे पालन करायचे असते. आकृती १ मध्येच ती कृति कशी करायची हे दाखवले आहे.



आकृती १

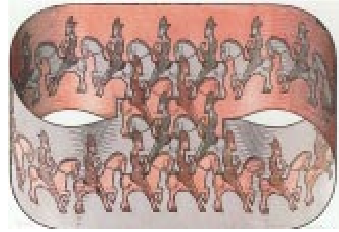
हे कोड सोडवताना असे लक्षात येईल की रेषांना गोळ्यांच्या पलीकडे नेल्याशिवाय उत्तर मिळणार नाही. याचा मतितार्थ असा आहे की अनेकदा प्रश्नांची उत्तरे मिळवण्यासाठी चौकटीच्या किंवा चाकोरी बाहेर विचार करणे आवश्यक ठरते. बँकांची पैसे काढण्यासाठीची एटीएम सुविधा किंवा उपनगरीय गाड्यांसाठी कूपन्सची उपलब्धतता ह्या व्यवस्था केवळ सेवा खिडक्या वाढवण्यापेक्षा ग्राहकांना खचितच उपयुक्त आहेत. काही गणिती कोडी त्यामुळे मार्गदर्शक ठरतात.

रंजक चित्रे

वरील कोड्याची एक दुसरी बाजू पण आहे. ती म्हणजे पेन किंवा पेन्सिल न उचलता आकृती काढणे. ही एक वेगळ्याच चित्रकलेच्या प्रकाराला प्रोत्साहन देते. त्याचे एका उदाहरण आकृती २ मध्ये दिले आहे. अशा तऱ्हेच्या गणिती संकल्पनांवर आधरलेली अनेक चित्रे सुप्रसिद्ध चित्रकार एम. सी. आयशर यांनी काढलेली आहेत. आकृती ३ हे त्यातील एक चित्र आहे. तुम्ही असा प्रयत्न जरूर करावा.



आकृती २

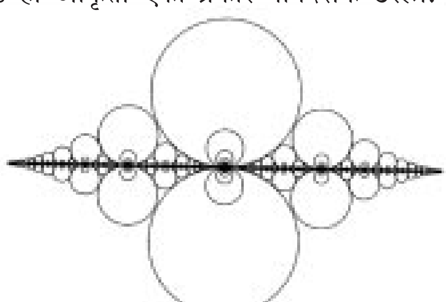


आकृती ३

गणितीताल काही प्राथमिक प्रक्रिया वापरून विविध प्रकारचे नमुने तयार करता येतात, ज्यांचा उपयोग सजावटीसाठी करता येणे शक्य आहे. आपण त्याचे एक उदाहरण बघू. कुठले ही दोन पूर्णांक घेऊया जसे की, क आणि ख. त्यानंतर एका आलेख कागदावर (ग्राफ पेपर) कम्पॉसने एक वर्तुळ काढू या ज्याची त्रिज्या १/(२ख^{२}) इतकी असेल आणि (क/ख, १/(२ख^{२})) हे त्याचे केन्द्र असेल. क आणि ख चे पूर्णांक मूल्य बदलत जाऊ आणि त्याच आलेख कागदावर सदरप्रमाणे वर्तुळे काढत राहू. नमुना म्हणून सोबतचा तक्ता बघावा :

क	ख	केंद्र (क/ख, १/(२ख^{२}))	त्रिज्या (१/२ख^{२})
१	२	(०.५, ०१२५)	०.१२५
४	३	(१.३३३, ०५५६)	०.५५६
३	६	(०.५, ०.०१४)	०.०१४
...	...	....	....
...	...	....	....

क आणि ख ची अनेक मूल्ये वापरल्यावर आकृती ४ प्रमाणे चित्र मिळेल. कुठले ही वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळाच्या आत जाणार नाही हे विशेष. एल. आर. फोर्ड यांनी १९३८ साली ही प्रतिकृति निर्माण करण्याचे वरील साधे गणित मांडले म्हणून त्यांना ‘फोर्ड सर्कल्स’ असे म्हटले जाते. ही प्रक्रिया परिमेय अंक (रॅशनल नंबर) अनंत आहेत याची सिद्धता ही देते. कंगोरी भूमितीच्या निर्मितीसाठी पुढे ही आकृती एका प्रकारे मार्गदर्शक ठरली.



आकृती ४

आकृती ४ संगणकाद्वारे निर्माण करून त्यात वेगवेगळे रंग भरले तर ती सजावटीसाठी फारच आकर्षक ठरते. याच धर्तीवर रांगोळींचे विश्लेषण गणिती पद्धतीने करून अतिशय मोहक सजावटीचे सामान तयार करणे शक्य आहे. गणिताचा एक वेगळाच पैलू या साध्या प्रक्रियेतून पुढे येतो. या विषयात संशोधन व उपयोजन या दोन्हीसाठी प्रचूर प्रमाणात वाव आहे. यासाठी लागणारी साधने आपल्या रोजच्या वापरातली आहेत. मंनोरंजनाबरोबरच गणित हा विषय आपल्यासाठी अनेक उपयोगी दालने उघडून देतो.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

१८

आत–बाहेरचे गणित

गणितातील काही निष्कर्ष अगदी स्पष्ट, सोपे आणि सहज पटणारे वाटतात. मात्र ते सिद्ध करणे कठीण असू शकते. या संदर्भात आपण एक बंदिस्त वक्र रेषेने विभाजित होणाऱ्या प्रतल किंवा पृष्ठ भाग याचा अभ्यास बघुया. त्या बाबतचे एक प्राथमिक प्रमेय फ्रेंच गणिती कॅमिल जॉर्डन (१८३८–१९२२) याने त्याच्या १८८७ साली प्रसिद्ध झालेल्या पाठ्य–पुस्तकात मांडले. म्हणून त्याला 'जॉर्डन कर्व्ह थेरम' असे म्हटले जाते. ते प्रमेय असे आहे :

"प्रतल किंवा सपाट पृष्ठभागावर एक अखंड बंदिस्त रेषा (क्लोइड कर्व्ह) त्या प्रतलाचे दोन स्वतंत्र भाग करते, एक आतला आणि एक बाहेरचा."

या प्रमेयाची सिद्धता देणे जॉर्डनला फार कठीण गेले आणि त्यात काही उणीवा होत्या. त्याची पहिली परिपूर्ण व व्यापक सिद्धता प्रसिद्ध अमेरिकन गणितज्ञ ओ. व्हेब्लेन (१८८०–१९५९) याने १९०५ मध्ये मांडली. त्याचे वाढीव मितीतील रूप एल. इ. जे. ब्र्रूवरने १९०९ मध्ये विकसित करून एक मूलभूत प्रमेय सिद्ध केले, ज्याला 'जॉर्डन–ब्र्रूवर सेपरेशन थेरम' असे म्हटले जाते. या प्रमेयावर आज देखील गणिती काम करत आहेत. एका अर्थाने जॉर्डनच्या प्रमेयाने क्षेत्रविद्या (टोपोलोजी) या विषयाच्या अभ्यासाला चालना दिली.

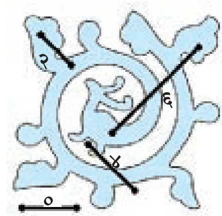

कॅमिल जॉर्डन (१८३८–१९२२)

उपयोगासाठी नियम

या प्रमेयाचा उपयोग मनोरंजनात्मक गणितात बराच वेळा होताना दिसतो. उदाहरणार्थ, तीन स्वतंत्र घरांना पाणी, वीज आणि गॅस या प्रत्येकाची जोडणी एकमेकांना छेद न देता करता येईल का? (याचे उत्तर नाही असे येते) काही

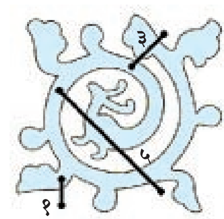
वेळा दूरवर पसरलेल्या गुंतागुंतीच्या संरचनेत आपण तिच्या आत आहोत की बाहेर आहोत हे समजणे कठीण होते. चीनची सुप्रसिद्ध नागमोडी वळण असलेली लांब भिंत अनेक वेळा असा संभ्रम निर्माण करते.

या बाबतीत खालील नियम सिद्ध झालेले आहेत :



आकृती १

१) साध्या बंदिस्त वक्र रेषेने निर्माण केलेल्या प्रतल भागातील एकाच बाजूचे दोन बिंदू सरळ रेषेने जोडल्यास ती सरळ रेषा त्या वक्र रेषेला शून्य किंवा सम संख्येत (२, ४, ६...) छेद देईल. याचे उदाहरण आकृती १ मध्ये दिले आहे. दोन बिंदू जे दोन आणि सहा छेद देणाऱ्या सरळ रेषेने जोडले आहेत ते पूर्णपणे आत आहेत, तर शून्य आणि चार छेद असलेल्या रेषेने जोडलेले बिंदू संपूर्णपणे बाहेर आहेत.



आकृती २

२) साध्या बंदिस्त वक्र रेषेने निर्माण केलेल्या प्रतल भागातील दोन विरूद्ध बाजूचे बिंदू सरळ रेषेने जोडल्यास ती सरळ रेषा त्या वक्र रेषेला विषम संख्येत (१, ३, ५,...) छेद देईल. याचे उदाहरण आकृती २ मध्ये दिले. एक, तीन व पाच छेद देणाऱ्या सरळ रेषा आतील आणि बाहेरील भागातील बिंदूना जोडत आहेत.

वरील नियमांचा वापर करून आकृती ३ मधील मध्य भागात असलेला काळा ठिपका आत आहे की बाहेर हे शोधणे रंजक होऊ शकते. अशी विविध प्रकारची कोडी निर्माण करणे शक्य आहे.



आकृती ३

उपयोजन

जॉर्डनचे प्रमेय आणि वरील नियमांचा वापर सुबक रांगोळी, वेलबुट्टी, प्रतिकृती आणि संरचना करण्यासाठी केला जाऊ शकतो. याचे एक सुंदर उदाहरण आकृती ४ दाखवते.



आकृती ४

अगदी प्राथमिक स्वरूपाचे गणिती निष्कर्ष देखील गणितास पुढे नेण्यास तसेच उपयोजनांद्वारे गणिताची उपयुक्तता सिद्ध करतात, हे एका प्रकारे गणिताचे बहुपदरी सामर्थ्य दाखवते.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

⌘⌘⌘

१९

भाषा–गणित घनिष्टता

प्रगत भाषा आणि गणिताचा विकास यामुळे माणसाला सर्व प्राणीजगतावर वर्चस्व मिळवता आले आहे यात शंका नाही. अभ्यास असे दाखवतात की भाषा आणि गणिताचा संबंध अगदी आरंभापासून घनिष्ट राहिलेला आहे. भाषेचे व्याकरण बऱ्याच प्रमाणात गणिती पद्धती व शिस्तीप्रमाणे असते. एका वस्तूसाठी एकवचन आणि त्या अधिक असल्यास बहुवचन व त्यानुसार क्रियापदातील फरक अशासारख्या बाबी एक, दोन व त्याहून मोठ्या संख्येतील वस्तू दाखवण्यासाठी वापरणे, हे त्याचे प्राथमिक उदाहरण आहे.

गणिती चिन्हे

गणिताचा इतिहास असे सांगतो की जवळ जवळ सतराव्या शतकापर्यंत गणितात वापरली जाणारी चिन्हे व समीकरणे मांडण्याच्या पद्धती सर्वमान्य झालेल्या नव्हत्या. त्यामुळे गणितातील प्रमुख संकल्पना, सिद्धांत, गणिती प्रश्न सोडवण्याच्या रिती आदी सर्व मांडण्यासाठी भाषेचा आधार घेतला जात असे. त्यामुळे गणित विषय शिकणे व शिकवणे हे भाषेवर प्रभुत्व नसल्यास बहुधा अशक्य होते. उदाहरणार्थ,

$$\Delta^{\gamma}\,\bar{\alpha}\,ç\,\bar{i}\,\gamma\,\sigma\,M\,\lambda\,\bar{\theta}$$

हे डायफंटुसचे ग्रीक भाषेतील समीकरण, एका गोष्टीचा वर्ग आणि तिचा दहापट केल्यावर उत्तर एकूणचाळीस आले पाहिजे असे असल्यास ती गोष्ट कोणती असे विचारते. आज आपण त्याला $क्ष^{२} + १०क्ष = ३९$ असे

सुटसुटीतपणे लिहितो. मात्र असा विशेष गणिती भाषेचा विकास होईपर्यंत सर्वसाधारण भाषेचा आधार घेऊनच गणिताचा अभ्यास गेली काही हजार वर्षे होत आलेला आहे ह्याची नोंद घेतली पाहिजे. संस्कृत, चीनी, ग्रीक, लॅटीन, अरबी व फार्शी अशा भाषांत गणितातील अभिजात कार्य संकलित होत गेले.

म्हणी आणि गणित

म्हणी म्हणजे अनुभवाच्या खाणी असे म्हटले जाते व त्यामुळे जगातील सर्व प्रमुख भाषांमध्ये म्हणी भरपूर प्रमाणात आढळतात. यमक, अनुप्रास व ठसकेदार रचना याशिवाय गणिती अंक, संख्या व कल्पना यांचा चपखल उपयोग यामुळे म्हणी तसेच वाक्प्रचारयुक्त भाषा-साहित्य व बोली भाषा लोकप्रिय राहिलेल्या आहेत. डॉन किक्झोट या डी.एम.डी. सर्व्हेन्टीस लिखित मूळ स्पॅनिश भाषेतील १६०५ साली प्रसिद्ध झालेल्या जगप्रसिद्ध कादंबरीत सँको पांझा या त्याच्या नोकराच्या तोंडी वारंवार घातलेल्या म्हणींनी त्या साहित्यकृतीला एक वेगळाच उठाव आणला आहे हे ह्या संदर्भातले एक बोलके उदाहरण आहे.

मराठी भाषा म्हणींच्या बाबतीत समृद्ध असून आयुष्यातील बहुविध प्रसंगांसाठी योग्य अशी म्हण सहसा उपलब्ध आहे. महत्त्वाची बाब म्हणजे त्यातील अनेक म्हणी गणिती संख्या, संकल्पना आणि मोजमापांनी गुंफलेल्या आहेत. आपण अशा काही निवडक म्हणी इथे बघुया. बहुतेक सर्व म्हणींचा अर्थ स्पष्ट आहे.

१) आंधळा मागतो एक डोळा, देव देतो दोन

२) एकटा जीव सदाशिव

३) एक पुती रडे सात पुती रडे (सगळेच असंतुष्ट)

४) प्रथम ग्रासे मक्षिकापात

५) दोघांचे भांडण, तिसऱ्याचा लाभ

६) दोन डोळे शेजारी, भेट नाही संसारी

७) दोन घरचा पाहुणा उपाशी

८) पोटात एक आणि ओठात एक

९) ढोलक्यास दोन्हीकडून थपडा

१०) तेरड्याचा रंग तीन दिवस

११) पळसाला पाने तीनच

१२) नित्याचा पाहुणा, तिसऱ्या दिवशी दिवाणा (किंमत न राहणे)

१३) चार दिवस सासूचे, चार दिवस सूनेचे

१४) सब घोडे बारा टक्के

१५) बारभाईची शेती काय लागेल हाती

१६) दुष्काळात तेरावा महिना

१७) शिर सलामत तर पगडी पचास

१८) पहिले पाढे पंचावन्न (फिरून पूर्वीसारखे वागणे)

१९) साठी बुद्धी नाठी

२०) नकटीच्या लग्नाला सतराशे विघ्न

२१) पैसा दक्षिणा लक्ष प्रदक्षिणा (काम जास्त, मोबदला अल्प)

२२) झाकली मूठ सव्वा लाखाची (अब्रू सांभाळणे)

याच प्रमाणे तीन तेरा होणे, चार हात दूर राहाणे, चौपदरी गळा काढणे, चारी मुंड्या चीत करणे, एका दगडात दोन पक्षी ठार, एका दिवसात घर बांधुन होत नसते, चौदावे रत्न दाखवणे असे अनेक वाक्प्रचार गणिती घटकांचा वापर करून तयार झालेले आहेत.

काही संख्या प्राचीन काळापासून साहित्यात मोठ्या प्रमाणात वापरलेल्या आढळतात. उदाहरणार्थ, १८ ही संख्या. महाभारतात १८ पर्वे, भगवत्‌गीतेत १८ अध्याय, महाभारतात एकूण १८ अक्षौहिणी सैन्य, १८ पुराणे तसेच १८ उप-पुराणे, १८ वर्ण, १८ पगड-जाती, १८ धान्यांचे कडबोळे, १८ गुणांचा खंडोबा इत्यादी. वैर व्यक्त करण्यासाठी ३६चा आकडा वापरणे, ६४ योगिनी व ६४ कला, ८४ चा फेरा अशा असंख्या कल्पना गणिताशी सांगड घालताना आढळतात. थोडक्या शब्दांत मोठा आशय सांगणे गणितामुळे सहज जमते.

संख्याशास्त्र व गणिती संबंध

शितावरून भाताची परीक्षा ही एक प्राचीन म्हण म्हणजे संख्याशास्त्रातील नमुना सिद्धांताचा (सॅम्पलिंग थेयरी) गाभा व्यक्त करते.

कारण सर्वव्यापक सर्वेक्षण प्रत्यक्षात करणे सहसा अशक्य असल्यामुळे योग्य प्रकारे प्रातिनिधीक नमुना गोळा करून संपूर्ण लोकसमूह (युनिव्हर्स) बाबत निष्कर्ष काढावे लागतात. सामाजिक विज्ञानातील संशोधनात संख्याशास्त्राचे हे मोठे योगदान आहे. अर्थातच नमुना निवडण्याचा अनेक प्रमाणित पद्धती विकसित झाल्या आहेत व त्याबाबत संशोधन चालू आहे.

राईचा पर्वत करणे म्हणजे नगण्य किंवा लहान गोष्टीला प्रचंड मोठे करणे अशी आणखीन एक प्रसिद्ध उपरोधक म्हण आणि गणितातील एक अमूर्त, पण आश्चर्यकारक सिद्धांताचा मेळ बसतो हे अप्रूप वाटते. ह्या सिद्धांताला 'बनाक-तार्स्की' सिद्धांत असे म्हटले जाते, जो पोलंड मधील गणिती एस. बनाक (१८९२-१९४५) आणि ए. तार्स्की (१९०२-१९८३) यांनी १९२४ साली प्रसिद्ध केलेल्या एका शोधलेखात मांडला होता. त्याच्या गणिती तपशीलात न जाता आपण त्याचा अर्थ बघुया. हा सिद्धांत सांगतो की एक भरीव गोळा घेतला व त्याचे सांत संख्येत (मोजता येतील इतके) तुकडे केले तर त्यांना परत अशा गणिती प्रकारे जोडता येऊ शकते ज्याने मूळ गोळ्याच्या आकाराचे व घनफळाचे दोन समान गोळे तयार करणे शक्य आहे. ह्याचा अर्थ असा की एका वाटाण्यापासून आपल्या सूर्याइतका गोळा निर्माण करणेही शक्य आहे - अर्थातच गणिताच्या अमूर्त विश्वात आणि न की प्रत्यक्षात. या सिद्धांताबाबत अधिक गणिती माहितीसाठी इंग्रजी संदर्भसूची क्रमांक २९ पहा.

भाषाभ्यास व गणित

भाषेच्या पूरकतेसाठी गणिताचे योगदान या विषयावर अधिक संशोधनाची गरज आहे. त्यामुळे भाषेचे सखोल विश्लेषण आणि साहित्यात दडलेले अभिप्रेत अर्थ पुढे आणणे शक्य होईल. या संदर्भात सांकेतिक भाषेत संदेशांची निर्मिती व उकल ह्यावर बरेचसे गणिती कार्य जगभर चालू आहे (क्रिप्टोलोजी किंवा क्रिप्टोग्राफी). दुसरे क्षेत्र म्हणजे साहित्यिक मजकुराची विविध प्रकारे तपासणी करणे. त्यासाठी कंटेट ॲनालिसिस व त्याचे प्रगत रूप म्हणजे टेक्स्ट माइनिंग अशा पद्धती आता उपलब्ध झालेल्या आहेत. या सर्व कामांसाठी संगणकाचा भरपूर उपयोग केला जातो. शब्दांच्या भरीला गणित असले तर एक अतिशय प्रभावी साधन उपलब्ध होते. तरी मानवी भाषा आणि गणित यांच्यातील संबंधाचा अभ्यास अनेक प्रकारे उपयोगी ठरू शकतो हे खरे.

⌘⌘⌘

२०

गणित आणि तऱ्हेवाईकपणा

गणित हे सुरुवातीस मोठ्या प्रमाणात अमूर्त रूपात मांडले जात असले तरी त्याचा प्रत्यक्षात वापर पुढे झालेला आढळतो, तर काही वेळा एखादा खास प्रश्न सोडवण्यासाठी विशिष्ठ गणिती पद्धती विकसित झाल्याचे दिसून येते. उदाहरणार्थ, लिनिअर प्रोग्रामिंग या ऑपरेशनल रिसर्च मधील एका शाखेची सुरुवात दुसऱ्या महायुद्धात अमेरिका व इंग्लंड यांच्या वायुदलाच्या मर्यादित संसाधनांचा इष्टतम उपयोग कसा करता येईल या समस्येपासून झाली, व त्यासाठी सिम्प्लेक्स मेथड ही नवीन आणि अतिप्रभावी गणिती पद्धत पुढे आली. अर्थातच असा व्यावहारिक विचार गणितज्ञ नेहमीच करतात असे नाही.

प्रदीर्घ परंपरा

मात्र बहुतांशपणे गणिताचा उपयोग फक्त गणितासाठी असा काहीसा तऱ्हेवाईक वाटणारा दृष्टिकोन गणिताच्या इतिहासात आढळतो. युक्लिड (इ.स. पूर्व ३२५-२६२), ज्याने तर्कशुद्धपणे भूमितीचा पाया रचून मोठे योगदान केले, त्याच्या अकादमीत (पाठशाळेत) एक विद्यार्थी त्याला नेहमी विचारायचा की या भूमितीतील प्रमेय व सिद्धांत-सिद्धता यांचा प्रत्यक्षात उपयोग काय? शेवटी एके दिवशी युक्लिडने आपल्या नोकराला त्या विद्यार्थ्याला एक नाणे देण्यास सांगितले व तुला आता उपयोग कळला असे सांगून त्याची बोळवण केली. तसेच आर्कीमिडीजने (इ.स. पूर्व २८७-२१२) गणिताचा वापर अनेक नाविन्यपूर्ण अस्त्रे निर्माण करण्यासाठी केला, पण त्यांचा त्याला कधीच आनंद वाटला नाही. वृत्तचिती किंवा दंडगोल (सिलिन्डर) आणि गोल (स्फिअर) यांचे घनफळ (व्हॉल्यूम) आणि वक्रपृष्ठफळ (सरफेस क्षेत्रफळ) काढण्याची त्याने शोधून

काढलेली सूत्रे ही त्यांच्यासाठी सर्वश्रेष्ठ उपलब्धि होती आणि ती सूत्रे त्याच्या इच्छेनुसार त्याच्या थडग्यावर कोरण्यात आली.

या विचारसरणीचे एक उत्तम उदाहरण म्हणजे केवळ मूलभूत गणितात भरीव व आयुष्यभर कार्य केलेले आणि श्रीनिवास रामानुजन यांना पुढे आणण्यास कारणीभूत ठरलेले इंग्लंडमधील केम्ब्रिज विद्यापीठातील प्रसिद्ध गणितज्ञ प्राध्यापक जी. एच. हार्डी (१८७७–१९४७) हे होय. त्यांनी 'अ मॅथेमॅटिशन्स अपॉलिजि'या आपल्या आत्मचरित्रात (१९४०) असे नमूद केले आहे की मी अंकशास्त्रात केलेले काम कुठल्याही व्यावहारिक बाबीसाठी उपयुक्त नाही ह्याचा मला अभिमान वाटतो. असे प्रतिपादन आजच्या उपयुक्ततावादी काळात विक्षिप्त वाटेल. तथापि हार्डी यांचे अंकशास्त्रातील काही अमूर्त निष्कर्ष पुढे सांकेतिक भाषेत संदेशांची देव–घेव करण्यासाठी फार महत्त्वाचे ठरले व ते बघण्यास ते हयात नव्हते ही त्यांच्यासाठी जमेची बाजू मानली जाते.

फील्डस पदकाच्या अटी

गणितासाठी स्वतंत्र नोबेल पारितोषिक नसल्यामुळे १९३६ पासून देण्यात येणारे फील्डस पदक (मेडल) हे त्याच्या तोडीचे मानले जाते. या सुवर्ण पदकाच्या पुढच्या बाजूवर आर्किमिडीजचा चेहरा व त्यासोबत 'मानवी मर्यादा ओलांडणे आणि विश्वाला कह्यात ठेवणे' असे ध्येय वाक्य (लॅटीन भाषेत) अंकीत असते (चित्र क्रमांक १). पदकाच्या मागील बाजूवर 'असामान्य कामाबद्दल हे जगातील गणितज्ञांच्या समोर देण्यात येत आहे' अशा आशयाचा मजकूर अंकीत असतो (चित्र क्रमांक २). पदकाच्या कडेवर विजेत्याचे नाव कोरलेले असते. या पदकाबरोबर केवळ १३,५०० अमेरिकन डॉलर्स एवढी रक्कम दिली जाते (नोबेल पारितोषिक विजेत्यास १३,००,००० अमेरिकन डॉलर्स दिले जातात). मात्र फील्डस पदकासाठी गणितज्ञाची निवड व ते प्रदान करण्याची पद्धत थोडी चमत्कारिक आहे हे खालील अटींवरून लक्षात येईल. :

१) फील्डस पदक दर चार वर्षांनी भरणाऱ्या आंतरराष्ट्रीय गणित काँग्रेसच्या उद्‌घाटन समारंभात देण्यात येईल.

२) हे पारितोषिक दोन, तीन किंवा चार गणितज्ञांना देण्यात येईल.

३) त्यासाठी गणितज्ञांची एक समिती दोन वर्ष आधीच नामांकने मागवून निवडप्रक्रिया सुरू करेल.

४) हे पारितोषिक कुठल्या एका विशिष्ट शोध किंवा शोधलेखासाठी नसून एकूण गणिती योगदानानुसार दिले जाईल.

५) ज्यावर्षी पारितोषिक स्वीकारणार, त्या वर्षीच्या १ जानेवारीस विजेत्याचे वय ४० हून कमी असले पाहिजे.



चित्र क्रमांक १



चित्र क्रमांक २

वरील वयाची अट अनेक वेळा अडचणीत टाकणारी ठरली आहे. उदाहरणार्थ, फर्माचा अंतिम सिद्धांत १९९४ मध्ये म्हणजे जवळजवळ ३५० वर्षांनी सिद्ध करण्यात यश मिळवलेल्या अॅण्ड्रयू वाइल्सला ही वयाची अट आड आल्यामुळे फील्डस पदक देता आले नाही, म्हणून त्याला दुसरे मानाचे वुल्फ पारितोषिक देऊन त्याचा गौरव करण्यात आला. आता माणसाचे सरासरी वयोमान वाढल्यामुळे वरील वयाच्या अटीचा फेरविचार करणे आवश्यक वाटते. आणखीन एक वेगळी गोष्ट २००६ मध्ये घडली ज्यावेळी रशियन गणिती जी. पेरलमन याने फील्डस पदक घेण्यास नकार दिला. त्याला प्रमुख कारण म्हणजे त्याच्या मते गणिती योगदान पारितोषिकाने मोजायचे नसते !

आणखी काही उदाहरणे

१९३० मध्ये काही फ्रेंच गणितज्ञांनी (एस. एलेनबर्ग वगळता) एक गट स्थापून संपूर्ण गणितासाठी एकात्मक चौकट तयार करून पाठ्यपुस्तके प्रसिद्ध करण्याचे ठरवले. त्यांनी निकोलस बाउरबाकी असे एका प्राचीन सेनापतिचे नाव आपल्या गटाला दिले व त्यांच्या प्रत्येक पुस्तकावर लेखक म्हणून हेच नाव होते, न की खऱ्या लेखकांचे. त्यांच्या या उपक्रमामुळे गणिती मांडणीवर लक्षणीय प्रभाव पडला जो पुढील पाच दशकं कायम राहिला. तर्कसंगत मांडणीला त्यात प्राथमिकता दिली गेली आणि व्यावहारिक बाबी दुय्यम ठरवून

जवळपास बाद करण्यात आल्या. बाउरबाकीच्या मते, जे त्याच्या पुस्तकांत नाही ते गणित नव्हे ! **एलिमेण्टस ऑफ मॅथेमेटिक्स** असे सर्वसाधारण नाव त्याच्या पुस्तक मालिकेसाठी असून त्यातील पहिले पुस्तक १९३९ मध्ये प्रसिद्ध करण्यात आले. पहिली सहा पुस्तके सेट थेयरी, ॲलजेब्रा, टोपोलोजी, फन्कशन्स ऑफ अ रिअल व्हेरीएबल, टोपोलोजिकल व्हेक्टर स्पेस आणि इन्टीग्रेशन या गणितातील मूलभूत संकल्पनाबाबत आहेत.

बाउरबाकी गटात सामिल झालेल्या गणितज्ञाचे सदस्यत्व तो ५० वर्षाचा झाला की संपुष्टात येते, ही एक आगळीच बाब आहे. काही वर्षापूर्वी पैसे वाचवण्यासाठी बाउरबाकीने एका अमेरिकन गणिती जर्नलचे वैयक्तिक वर्गणीदार होण्यासाठी म्हणून अर्ज केला. मात्र संपादक दक्ष असल्यामुळे बाउरबाकी ही एक व्यक्ती नसून एक गट असल्याचे लक्षात घेऊन त्याने बाउरबाकीला संस्थेसाठी ठरवलेली वर्गणी भरण्यास सांगितले, जी वैयक्तिक वर्गणीपेक्षा काही पटीने अधिक होती.

इ. डिकास्त्रा (१९३०-२००२) ह्या डच गणितज्ञाने १९५९ मध्ये एखाद्या जाळ्यामधील कुठल्याही दोन बिंदूना जोडणारा किमान अंतराचा मार्ग शोधण्याची एक प्रभावी पद्धत विकसित केली. या पद्धतीला 'डिकास्त्रा ॲलगोरिदम' म्हटले जाते. डिकास्त्राचा कल संगणकाचा वापर करण्यावर जास्त होता. तो स्वतःला १९५० च्या दशकातच 'प्रोग्रॅमर' म्हणायचा जेव्हा संगणक वापराची नुकतीच सुरुवात होत होती. मात्र त्याने व्यवसाय म्हणून प्रपत्रात अशी नोंद केल्यामुळे १९५७ मध्ये ॲमस्टरडॅम मधील शासकीय कार्यालयाने त्याचा विवाह परवान्याचा अर्ज नाकारला आणि त्याला स्वीकृतीसाठी त्यात प्रचलित व्यवसायाचे नाव घालणे भाग पडले.

गणित हे जरी तर्कसंगत विचार करणे आणि काटेकोरपणे कुठलाही पूर्वाग्रह न धरता प्रक्रिया करणे यावर भर देणारे असले तरी त्याच्याशी संबंधित गणिती आणि संस्था तऱ्हेवाईकपणे वागू शकतात हे तेवढेच खरे असल्याचे वरील निवडक उदाहरणे दाखवतात.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

⌘⌘⌘

२१

गणिती नावे आणि टोपणनावे

काव्य आणि ललित साहित्याच्या इतर काही प्रकारात टोपणनाव धारण करून लेखक आपली कृती सादर करणे हे सामान्य मानले जाते. ह्याला मोठी परंपरा असून जगभर अशी प्रथा आजदेखील आढळते. खरे नाव न वापरणे हे अनेक कारणांमुळे केले जाते असे की लेखकाचे लिंग, वंश, स्थान व इतर काही संबंध समजू नये. कित्येक वेळा वेगळे राजनैतिक विचार हे प्रमुख कारण दिसून येते.

मात्र गणितासारख्या रोखठोक विषयाच्या लेखन कार्यात दुसऱ्या नावाने लेख किंवा पुस्तके प्रसिद्ध करणे हे समजणे काही वेळा कठीण जाते. गणिताचा इतिहास पाहाता गणिती विषय आणि गणितज्ञांनी घेतलेली नावे किंवा टोपणनावे अतिशय रोचक वाटतात. या लेखात त्यातील काही निवडक नमुने बघु या.

रोचक नमुने

१) ॲलजेब्रा :– भारतामध्ये इ. स. ५०० पासून पुढे आर्यभट, ब्रह्मगुप्त, महावीराचार्य, भास्कराचार्य अशा नामवंत गणितज्ञांनी दशमान पद्धती, ऋण अंक, बीजगणित व इतर प्रकारचे गणिती विषय विकसित केले आणि त्या संबंधी लेखन केले. इ. स. ७५० पासून इस्लामिक साम्राज्य भारताच्या पश्चिम वेशीपासून स्पेनपर्यंत पसरले. त्यामुळे अनेक भारतीय गणिती ग्रंथांचा (पोथ्यांचा) अनुवाद अरेबिक, फार्शी भाषेत झाला. त्यामध्ये 'अल–जाब्र वाल–मुकाबला' हे एक बीजगणिताशी संबंधित, प्रामुख्याने परिमेय (रॅशनल) संख्या वरील गणिती प्रक्रियांबाबतचे एक पुस्तक होते व त्याचा लेखक अल–

ख्वारझमी असा होता. या पुस्तकाचा पुढे लॅटीन आणि इंग्रजी भाषेत अनुवाद झाला व रूपांतर करताना त्या पुस्तकाच्या शीर्षकाचा पहिला भाग–ॲलजेब्रा या रूपात बीजगणिताला संबोधन म्हणून देण्यात आला व तो शब्दप्रयोग रूढ झाला हे विशेष.

२) ॲल्गोरिदम :– कुठल्या ही प्रश्नाचे उत्तर काढताना त्याची गणिती प्रतिकृती (मॉडेल) तयार करणे ही प्रथम पायरी असते. नंतर त्यावर गणिती सोपस्कार करून उत्तर शोधणे ही दुसरी पायरी असते. अशा गणिती रिती किंवा पद्धतीत प्रक्रिया करण्याचा एक क्रम असतो, जो पाळणे आवश्यक असते. अशा क्रमबद्ध रितीला इंग्रजीत ॲल्गोरिदम असे म्हणतात आणि संगणकाला देखील त्याप्रमाणे सूचना दिल्या जातात. वर उल्लेख केलेल्या अल–ख्वारझमी याच्या पुस्तकात या पद्धती विशद केल्या असल्याने आणि त्या पुस्तकाचे भाषांतरित रूप मोठ्या प्रमाणात वापरले गेल्यामुळे क्रमवार गणिती रितीला त्या लेखकाचे अपभ्रंश झालेले नाव ॲल्गोरिदम असे पडले व ते आज ही कायम आहे.

३) एम. एल. ब्लांक :– सोफी जर्मेन (१७७३–१८३१) ही एक असामान्य फ्रेंच महिला गणिती म्हणून आता मान्य पावलेली आहे. तथापि ती ज्या काळात वाढली आणि वावरली तो काळ गणितक्षेत्र महिलांना निषिद्ध मानणारा होता. आर्किमिडीजच्या गणिती कामगिरी वरून प्रेरणा घेऊन तिने अतिशय प्रतिकूल परिस्थितीत गणिताचे अध्ययन केले. महिला म्हणून तीचे गणिती कार्य प्रसिद्ध करणे तर दूर, तिच्या गणिताबाबतच्या पत्रांना सुद्धा गणितज्ञ उत्तर देत नसत. त्यावर तोडगा म्हणून तिने माउंट एल. ब्लांक असे पुरुषी नाव घेऊन गणितज्ञांशी पत्रांद्वारे संपर्क साधण्यास सुरुवात केली. विशेष म्हणजे सी. एफ. गौस (१७७७–१८५५) या जगप्रसिद्ध जर्मन गणितीला एम. एल. ब्लांकच्या पत्रांत तो प्रज्ञावंत गणिती असल्याची जाणीव झाली व त्याने तसे व्यक्तही केले. पुढे फ्रांस नरेश, नेपोलियनने जर्मनी पादाक्रांत केल्यावर युद्धाचा खर्च वसूल करण्यासाठी जर्मन लोकांवर त्यांच्या पदानुसार कर बसवला. गौस हा जर्मनीतील गोटिंगन विद्यापीठात प्राध्यापक या मानाच्या पदावर असल्यामुळे त्याच्याकडून फार मोठ्या रकमेची मागणी केली गेली. ती भरणे शक्य नसल्यामुळे त्याने एम. एल. ब्लांकला पत्राद्वारे विनंती केली की त्याने आपले वजन व ओळखी वापरून फ्रेंच राज्यशासनाकडून त्यास भरीव

प्रणामात सूट मिळवून द्यावी. त्यावेळी मात्र सोफी जर्मेनला आपण महिला असून गौसला तशी मदत करणे शक्य नाही असे सांगणे भाग पडले. गौस अर्थातच आश्चर्यचकीत झाला.

सोफी जर्मेनचे गणिती काम अंकशास्त्र व इतर अनेक क्षेत्रात आहे. तिने सुप्रसिद्ध फर्माचा अंतिम सिद्धांत सोडवण्यासाठी केलेले कार्य पुढे उपयोगी पडले. ए. एम. लिजेण्डर या फ्रेंच गणितज्ञाने १८०८ मध्ये प्रसिद्ध केलेल्या आपल्या पुस्तकात जर्मेनला श्रेय देऊन पुढे आणले. इलास्टिक सरफेस बाबतचे जर्मेनचे मूळ गणिती निष्कर्ष नंतर पॅरिस मधील आयफेल टॉवर बांधण्यात अनेक प्रकारे उपयोगी ठरले. त्या टॉवरच्या पायथ्यावर त्याच्या बांधकामात योगदान करणाऱ्या ७२ व्यक्तींमध्ये मात्र तिचे नाव नाही याची टोचणी मनाला सतत होते.

४) ल्युईस कॅरोल :– सी. एल. डॉजसन (१८३२–१८९८) ज्याने ल्युईस कॅरोल हे टोपण नाव घेऊन 'ॲलिस इन वण्डरलँड' या आज देखील मुग्ध करणाऱ्या बालकथेची निर्मिती केली तो उच्च दर्जाचा गणिती आणि तर्कशास्त्रात पारंगत होता. ऑक्सफर्ड विद्यापीठातून गणितात स्नातक (१८५४) आणि स्नातकोत्तर (१८५७) पदव्या त्याने प्राप्त केल्या होत्या व ऑक्सफर्डमधील क्राइस्ट चर्च कॉलेजमध्ये प्राध्यापक म्हणून कार्यरत राहिला. मनोरंजनात्मक गणित व कोडी निर्माण करण्यात त्याचा हातखंडा होता, पण त्या प्रकारचे गणिती साहित्य प्रसिद्ध करताना टोपणनाव वापरणे त्याला प्रशस्त वाटे. औपचारिक गणित व इतर गणिती प्रकार वेगळे ठेवावे असे कदाचित त्याला वाटत असे. मात्र त्याला नाव, पैसा आणि प्रसिद्धी टोपणनावाने अधिक मिळाली हे सत्य आहे.

५) यूनबॉम्बर :– टी. चे. काझिन्स्की (१९४२–   ) या गणितज्ञाच्या बाबतीत मात्र गोष्ट विपरित आहे त्याचे १९६० च्या दशकात प्रसिद्ध झालेले लेख मूळ नावाने आहेत, पण तो प्रसिद्ध यूनबॉम्बर या नावाने झाला. तो अतिशय हुशार विद्यार्थी होता व १९६७ मध्ये त्याचा ८० पानी पीएच.डी.चा प्रबंध (मिशिनग विद्यापीठ, अमेरिका) आज ही उत्कृष्ट मानला जातो. त्याचे काम प्रामुख्याने 'बाउंडरी फंक्शनस्' या विषयावर आहे, पण ते समजणे अतिशय कठीण आहे असे तज्ञांचे मत आहे. मात्र पुढे एकदम सर्व गोष्टी सोडून तो जंगलात एकटा राहू लागला व त्याने स्वतः बनवलेल्या बॉम्बसनी ३

अनोळखी व्यक्तींना ठार केले आणि २२ जणांना इजा केली. १९९६ मध्ये त्याला पकडून आजीवन कारावासात ठेवण्याची शिक्षा देण्यात आली आहे. अतिशय प्रगल्भ अशी त्याची गणिती प्रतिभा याप्रकारे समाजाला फारशी उपयुक्त न ठरता घातक ठरली.

अधिक उदाहरणे

वरील उदाहरणांशिवाय अनेक असे मासले उपलब्ध आहेत. आंद्रे वाईल (१९०६-१९९८) यांनी १९३० च्या दशकात काही फ्रेंच गणितज्ञांना एकत्र करून एन. बाउरबाकी या नावाचा एक गट स्थापला व त्या गटाने अनेक गणिती पाठ्यपुस्तके एन. बाउरबाकी लेखक या नावाने प्रसिद्ध केली (याबाबतीत अधिक माहितीसाठी प्रकरण २० बघा). तसेच १९७८ पासून डिफरन्शियल जॉमेट्री या विषयात लेखन करणारे अनेक फ्रेंच गणितज्ञ आर्थर बास या टोपणनावाने लेख प्रसिद्ध करत आहेत. त्याचप्रमाणे जी. डब्ल्यू. पेक आणि जे. रेनवॉटर या टोपणनावाने लेख गणिती प्रसिद्ध करताना आजही आढळतात. या प्रथेची कारणे काही ही असोत, पण वेगळी नावे आणि टोपणनावे वापरणे हे गणित क्षेत्रात मान्य करणे हे गणिताचा दृढ संबंध मनुष्याच्या भौतिक जगाशी आणि वैयक्तिक स्वभाववैचित्र्याशी असल्याचे एक लक्षणीय द्योतक आहे.

⌘⌘⌘

२२

आधुनिक भारतीय गणिती योगदान

भारतीय गणिती योगदान अगदी प्राचीन काळापासून उल्लेखनीय ठरलेले आहे. आर्यभट, प्रथम व द्वितीय भास्कराचार्य, ब्रह्मगुप्त, महावीराचार्य अशी काही नावे या संदर्भात सहजपणे पुढे येतात. या गौरवशाली परंपरेला श्रीनिवास रामानुजन (१८८७-१९२०) यांनी आणखी पुढे नेले. त्यांच्यानंतरच्या काळात, म्हणजे मागील जवळपास एका शतकात भारताचे गणिती योगदान कसे राहिले आहे असा प्रश्न पुढे येतो. मुलभूत व उपयोजित गणित, संख्याशास्त्र, प्रवर्तन संशोधन, संगणकशास्त्र व संलग्न शाखा आता गणितविज्ञानात समाविष्ट केल्या जातात. तर अशा व्यापक गणित क्षेत्रात भारतीय, अनिवासी भारतीय आणि भारतीय मूळच्या गणितज्ञांच्या आधुनिक काळातील उपलब्धी बघितल्यास अभिमान वाटावा अशी स्थिती आहे. खालील निवडक उदाहरणे याबाबतीत कल्पना देतात.

निवडक भारतीय गणिती

१) सी. आर. राव (१९२०-) यांचे संख्याशास्त्रातील एस्टिमेशन थेयरी, स्टॅटिस्टिकल इनफरन्स, मल्टीव्हेरीएट ॲनालिसिस, बायोमेट्रिका व काही अन्य उपविषयातील कार्य आंतरराष्ट्रीय स्तरावर गाजलेले आहे. *क्रॅमर-राव इनइक्वेलिटी, फिशर-राव थेरम, राव ओर्थोगोनल एरेज* अशा अनेक संकल्पना त्यांच्या नावाशी निगडीत आहेत. चौदा पुस्तके व ३५० हून अधिक उच्च दर्जाचे शोधलेख नावावर असलेल्या रावांना भारतीय व जागतिक सन्मानांशिवाय अमेरिकेचे अतिशय प्रतिष्ठेचे नॅशनल मेडल फॉर सायन्स हे २००२ साली देण्यात आले आहे.

२) डी. आर. कापरेकर (१९०५–८६) यांचे अंकशास्त्रातील तसेच मंनोरंजनात्मक गणितातील कार्य जगभर वाखाणले गेले आहे. *कापरेकर स्थिरांक* (६१७४), *डेम्लो संख्या, दत्तात्रय संख्या* अशा प्रकारच्या संख्या त्यांचे योगदान दाखवतात. देवळालीतील एका शाळेत साधे शिक्षक असा पेशा असूनही असे उल्लेखनीय काम करून त्यांनी एक आदर्श पुढे ठेवला आहे.

३) आर. सी. बोस (१९०१–८७) व एस.एस. श्रीखंडे (१९१७–) यांनी इ. टी. पार्करसोबत १९५९ साली ऑयलरचा एक २०० वर्ष जुना लॅटिन स्केअर बाबतचा निष्कर्ष चुकीचा सिद्ध करून गणित क्षेत्रात खळबळ निर्माण केली होती. बोस यांच्या संख्याशास्त्रातील कार्यावर आजदेखील जोमाने काम चालू आहे. श्रीखंडे यांनी मुंबई विद्यापीठात सेंटर ऑफ ॲडव्हांस्ड स्टडीज इन मॅथेमेटिक्स स्थापन केले व १९७८ पर्यंत त्याचे संचालन करून ते निवृत्त झाले. *श्रीखंडे ग्राफ* या नावाने त्यांचा एक निष्कर्ष खूप प्रसिद्ध आहे.

४) व्ही. एस. हुझुरबजार (१९१९–९१) यांचे संख्याशास्त्रातील काम राष्ट्रीय आणि आंतरराष्ट्रीय स्तरावर स्तुत्य झालेले आहे. *हुझुरबजार अटकळ* (कन्जक्चर) या नावाचा त्यांचा एक शोध आजदेखील संशोधकांना मार्गदर्शन करत आहे. त्यांच्या संख्याशास्त्रातील योगदानासाठी त्यांना १९७४ मध्ये पद्मभूषण देण्यात आले.

५) हरीश–चंद्र (१९२३–८३) यांचे गणितातील ली ग्रुप, सेमि–ग्रुप व एकूण ग्रुप थेयरीतील काम फार महत्त्वाचे मानले जाते. शेवटपर्यंत ते अमेरिकेत प्रिन्सटन येथील इंस्टिट्यूट फॉर ॲडव्हान्सड स्टडीज येथे जे. व्ही. न्यूमान प्राध्यापक या प्रतिष्ठित पदावर कार्यरत होते. त्यांना अमेरिकन मॅथमेटिकल सोसायटीने बहुमानाचे कोल पारितोषिक १९५४ मध्ये बहाल केले होते.

६) एन. करमरकर यांनी १९८४ मध्ये प्रचंड आकाराच्या लिनिअर प्रोग्रामिंग या स्वरूपातील प्रश्नाचे उत्तर काढण्यास एक नवीन व अतिशय कार्यक्षम पद्धत शोधून काढली जिला सर्वदूर *करमरकर ॲल्गोरिदम* या नावाने संबोधले जाते. यासाठी त्यांना जागतिक पातळीवरील अनेक सन्मान प्राप्त झाले आहेत.

७) एस. रामादोराय या भारतीय महिला गणितीला २००६ चे आंतरराष्ट्रीय ख्यातीचे श्रीनिवास रामानुजन पारितोषिक त्यांच्या बीजगणितीय अंकशास्त्रातील योगदानासाठी देण्यात आले आहे. त्यांचे इवास्वा थेयरीमधील

काम उच्च दर्जाचे मानले जाते. राष्ट्रीय ज्ञानआयोगाचे सदस्य व पंतप्रधांनाच्या वैज्ञानिक सल्लागार मंडळात त्यांचा समावेश होता.

८) एम. अग्रवाल, एन. कयाल आणि एन. सक्सेना यांनी २००२ साली एक सुबक व सर्वोपयोगी पद्धत कुठलीही संख्या ही मूळ संख्या (प्राइम) आहे की नाही हे तपासण्यासाठी विकसित केली. ती जगभर मान्य झाली असून त्यांच्या पद्धतीला *एकेएस पद्धत* म्हटले जाते आणि त्यांना त्यासाठी २००६ मध्ये मानाचे असे गोदेल पारितोषिक देण्यात आले.

आव्हान

या शिवाय व्ही. पी. गोडांबे (संख्याशास्त्र), ए. धारवडेकर (फोर कलर प्रॉब्लेम) ते अलीकडेच न्यूटनच्या ३५० वर्ष जुन्या प्रश्नांची गणिते सोडवण्यात यश मिळवलेल्या एस. रे असे अनेक गणितज्ञ भारताने आधुनिक काळात दिले आहेत. आवश्यकता आहे ती संशोधनाचा दर्जा वाढवून गणितासाठी नोबेल पारितोषिकाच्या तोडीचे मानले जाणारे फील्डस् पदक प्राप्त करणाऱ्या भारतीय गणितींची परंपरा निर्माण करण्याची.

⌘⌘⌘

२३

संभाव्य घटनांचा गणिती वेध

माणसाचे या पृथ्वीतलावरील आयुष्य पहिल्यापासून जोखीम आणि अनिश्चिततेने भरलेले असे राहिले आहे. आदिमानवाला नैसर्गिक आपत्ती, श्वापदांपासून धोका आणि पुढच्या जेवणाची भ्रांत असे अशाश्वतीचे घटक तर आता भीषण अपघात, कर्करोग आणि पर्यावरण प्रदुषणाचे गंभीर परिणाम यांची शक्यता भेडसावते आहे. एका अर्थाने आपले आयुष्य जुगारासारखेच आहे. यावर उपाय म्हणून मानवाने मंत्र, तंत्र आणि ज्योतिषविद्या अशा अनेक साधनांनी अनिश्चितता कमी करण्याचा प्रयत्न सातत्याने केला आहे. त्याचे फलित मात्र अनिश्चित स्वरूपाचे राहिले आहे.

आधुनिक संकल्पना

इतिहास बघता तर्कसंगत आधुनिक गणिती संकल्पना आणि पद्धतीचा वापर करून घटनांची संभाव्यता (प्रोबेबिलिटी) आणि त्यापासून मिळणाऱ्या लाभ व हानी यांचे अपेक्षित मूल्य (एक्सपेक्टेड व्हेल्यू) मोजण्याचा खरा प्रयत्न सतराव्या शतकात सुरू झाला. विशेष म्हणजे या गणिती विश्लेषणात्मक साधनांचा उगम जुगारातील काही पेच प्रसंग सोडवण्यापासून झाला. ब्लेस पास्कल (१६२३-१६६२), जेम्स बर्नोली (१६५४-१७०५), पीएर-सायमन लाप्लास (१७४९-१८२७) व इतर अनेक गणितज्ञांनी याबाबतीत संशोधन करून गणिती संभाव्यता आणि त्याधारित संख्याशास्त्र (स्टॅटिस्टिक्स) या विषयाचा स्वतंत्र विकास केला. त्याच बरोबर जोखीम-निगडीत विमाशास्त्र (ॲक्चूरिअल सायन्स) या शाखेचाही उदय झाला. आता ही दोन्ही शास्त्रे व्यापक गणितविज्ञानाच्या महत्त्वपूर्ण उपशाखा मानल्या जातात.

संभाव्यता नियम

संभाव्यता ही संकल्पना अनेक प्रकारे मांडता येते. आपण तिची सोपी व्याख्या वापरूया. कोणतीही घटना घडण्याच्या 'न' अशा संपूर्ण, स्वतंत्र आणि समप्रमाणात रिती असतील आणि त्यातील 'म' गोष्टी 'अ' ही एखादी घटना घडवून आणण्यास अनुकूल असतील तर 'अ'ची संभाव्यता : प (अ) = म/न. प (अ) = १ पूर्ण निश्चिती, तर प (अ) = ० म्हणजे असंभव. उदाहरणार्थ, एका लीप वर्षात ५३ बुधवार येण्याची संभाव्यता किती आहे ? एका लीप वर्षात ३६६ दिवस म्हणजे ५२ पूर्ण आठवडे आणि अतिरिक्त २ दिवस असतात. हे दोन दिवस रविवार-सोमवार, सोमवार-मंगळवार, मंगळवार-बुधवार, बुधवार-गुरुवार, गुरुवार-शुक्रवार, शुक्रवार-शनिवार आणि शनिवार-रविवार या सातप्रकारे असू शकतात (न). म्हणजे यात बुधवार दोन प्रकारे येऊ शकतो (म). तरी प (लीप वर्षात दोन बुधवार) = म/न = २/७.

विविध संभाव्यता एकत्र करण्याचे प्रमुख प्राथमिक नियम असे आहेत :

नियम – १ : अगदी स्वतंत्र अशा 'अ' *किंवा* 'ब' घटना घडण्याची संभाव्यता, त्यांच्या प्रत्येकी संभाव्यतेची बेरीज असते. म्हणजे,

प (अ किंवा ब) = प (अ) + प (ब)

उदाहरण १ – एक ते सहा अंक असलेला सामान्य फासा स्वैरपणे (रँडमली) टाकल्यास १ किंवा ३ हे अंक येण्याची संभाव्यता, प (१ किंवा ३) = प (१) + प (३) = १/६ + १/६ = २/६ = १/३.

नियम – २ : अगदी स्वतंत्र 'अ' *आणि* 'ब' घटना घडण्याची संभाव्यता, त्यांच्या प्रत्येकी संभाव्यतेचा गुणाकार असतो. म्हणजे, प (अ आणि ब) = प (अ) × प (ब)

उदाहरण २ – एक ते सहा अंक असलेला सामान्य फासा स्वैरपणे दोनदा टाकल्यास दोन्ही वेळा ६ येण्याची संभाव्यता, प (६ आणि ६) = प (६) × प (६) = १/६ × १/६ = १/३६.

टीप : वरील नियम त्याच पद्धतीने दोन पेक्षा अधिक घटनांसाठी वाढवून वापरता येतील.

अर्थातच या सर्व प्रक्रियांत घटना एकूण किती प्रकारे घडू शकतील याची गणना महत्त्वाची ठरते. उदाहरणार्थ, ५२ पत्याच्या संचातून ४ पत्ते स्वैरपणे

काढले तर ते प्रत्येकी बदाम, चौकट, किल्वर आणि इस्पिक (कुठल्याही क्रमाने) या वेगवेगळ्या प्रकाराचे असण्याची संभाव्यता किती असेल? इथे ५२ पत्यातून ४ पत्ते हे ५२! / (४! × ४८!) = २,७०,७२५ इतक्या प्रकारे काढता येतात, तर प्रत्येक प्रकाराचा एक पत्ता येण्याच्या शक्यता १३ × १३ × १३ × १३ = २८,५६१ इतक्या आहेत. म्हणून आपल्याला अपेक्षित प्रकाराची संभाव्यता २८,५६१/२,७०,७२५, म्हणजे १०% पेक्षा थोडी अधिक असेल. (क! = क × (क−१) × .... × २ × १. उदा ४! = ४ × ३ × २ × १ = २४)

नियम – ३ : 'न' चेंडू स्वैरपणे 'न' टोपल्यांत टाकले तर प्रत्येक टोपलीत एक चेंडू असण्याची संभाव्यता $न!/न^{न}$ अशी असते.

उदाहरण ३ – एक ते सहा अंक असलेला फासा स्वैरपणे सहा वेळा टाकला तर कुठलाही अंक परत येणार नाही याची संभाव्यता $६!/६^{६}$ = ०.०१५ अशी असेल असे हा नियम सांगतो. ही संभाव्यता अर्थात खूपच कमी आहे (१.५%).

नियम – ४ : 'र' चेंडू स्वैरपणे 'न' टोपल्यात टाकले, जेव्हा टोपल्यांची संख्या चेंडूहून अधिक आहे (न > र), तर कुठल्याही टोपलीत एका पेक्षा जास्त चेंडू नसतील याची संभाव्यता न × (न – १) × (न – २) × ..... (न – र + १)/ $न^{र}$ अशी असेल.

उदाहरण ४ : एका दहा मजली इमारतीतील प्रत्येक मजल्यावर थांबत जाणाऱ्या लिफ्टमध्ये जर सात माणसे असतील तर एकाच मजल्यावर दोन माणसे लिफ्टमधून बाहेर येण्याची संभाव्यता $१०×९×८×७×६×५×४/१०^{७}$=०.०६ अशी असेल असे या नियमावरून दिसते, जी अगदी कमी आहे (६%).

प्रत्यक्षात मात्र अनेक घटना घडण्याची संभाव्यता त्यांच्या घडण्याच्या क्रमावर अवलंबून असते. म्हणजे प (अ) ही 'अ' आणि प (ब) ही 'ब' घटना घडण्याची संभाव्यता असेल आणि प (ब । अ) ही 'अ' घटना घडल्यावर 'ब' घटना घडण्याची संभाव्यता असेल तर अशी स्थितीजनक (कंडीशनल) संभाव्यता प (अ आणि ब) = प (अ) × प (ब । अ) असते. उदाहरणार्थ रंग न ओळखता येणे (कलर ब्लाइंडनेस) याची पुरुषांतील संभाव्यता ५/१०० तर स्त्रियांमध्ये २५/१०,००० अशी असते. निवडलेली व्यक्ती पुरुष किंवा

स्त्री असण्याची संभाव्यता १/२ अशी असल्यास ती व्यक्ती रंग न ओळखू शकणारी असल्याची संभाव्यता (१/२) × (५/१००) + (१/२) × (२५/१०,०००) = ०.०२६ अशी वेगळीच दिसून येते. या परिस्थितीजनक संभाव्यतेचा उपयोग गुन्हा शाबित करणे, वैद्यकीय निदान करणे अशा अनेक क्षेत्रात केला जाऊ शकतो, मात्र त्याने प्राप्त झालेल्या निष्कर्षांचा अर्थ योग्यपणे लावला पाहिजे.

नियम – ५ (बेझचे प्रमेय किंवा नियम) : 'ब' ही घटना घडून गेली असल्यास 'अ' घटना घडण्याची संभाव्यता :

$$प\ (अ\ |\ ब) = \frac{प\ (ब\ |\ अ) \times प\ (अ)}{प\ (ब)}$$

उदाहरण ५ : एक रात्री एका शहरात घडलेल्या दुर्घटनेत एक टॅक्सीचा सहभाग होता, जी घटनास्थळावरून वेगाने पळून गेली होती. त्या शहरात ८५% टॅक्सीज हिरव्या रंगाच्या (एका कंपनीच्या) तर १५% निळ्या रंगाच्या होत्या (दुसऱ्या कंपनीच्या). एका साक्षीदाराने ती टॅक्सी निळ्या रंगाची होती असे सांगितले. त्याची दृष्टी व तशाच रात्रीच्या वेळी टॅक्सीचा रंग ओळखण्याची त्याची क्षमता तपासल्यावर तो ८०% वेळा बरोबर तर २०% चुकीचा ठरला. तरी दुर्घटनेत निळ्या टॅक्सीचा सहभाग होता याची संभाव्यता किती असेल ?



थॉमस बेझ (१७०१–१७६१) हा इंग्लंडमधील एक पाद्री होता आणि टनब्रिज वेल्स या नगरात त्याचे वास्तव्य होते. तो एक उपेक्षित असा कुशल गणिती होता, पण त्याचे कुठले ही काम त्याच्या हयातीत प्रसिद्ध झाले नव्हते. मात्र १७४२ मध्ये त्याला रॉयल सोसायटीचे सन्मानीय सदस्य (फेलो) करण्यात आले यावरून त्याच्या गणिती कार्यक्षमतेचा दर्जा दिसून येतो. त्याच्या मृत्यूनंतर त्याच्या कागदपत्रातून त्याचा मित्र रिचर्ड प्राइस याने त्याचा एक शोधलेख रॉयल सोसायटीला सूपूर्द केला जो तिच्या जर्नल मध्ये १७६३ साली प्रसिद्ध झाला व बेझ्चे प्रमेय (थेरम) हे लोकांपुढे आले. त्याचा वापर अनेक क्षेत्रात केला जातो, मात्र अनेक वेळा ते वादाच्या भोवऱ्यात सापडलेले ही आढळते.

समजा 'अ' म्हणजे दुर्घटनेत निळी टॅक्सी आणि 'ब' म्हणजे साक्षीदाराने निळी टॅक्सी बघितल्याची साक्ष दिली. म्हणजेच, प (अ) = ०.१५, प (ब । अ) = ०.८०.

प (ब) = प (निळी टॅक्सी आणि ती साक्षीदाराने बरोबर निळी म्हणून ओळखली)
+ प (हिरवी टॅक्सी आणि ती साक्षीदाराने चुकीची निळी म्हणून ओळखली)

= ०.१५ × ०.८० + ०.८५ × ०.२० = ०.२९

बेझच्या नियमानुसार, प (ब । अ) = $\frac{०.८० \times ०.१५}{०.२९}$ = ०.४१

याचा अर्थ दुर्घटनेत निळी टॅक्सी असणे व ती निळी म्हणून साक्षीदाराने ओळखणे याची संभाव्यता ४१ टक्के एवढीच आहे. म्हणजेच साक्षीदार जरी निळ्या टॅक्सीचा सहभाग म्हणत असला तरी हिरव्या रंगाची टॅक्सी असण्याची संभाव्यता जास्त दिसते. मात्र टॅक्सी निळी असण्याची पूर्वीची (प्रायोरी) संभाव्यता ०.१५ पासून ०.४१ पर्यंत वाढलेली या विश्लेषणावरून दिसते (पोस्टेरिओर संभाव्यता).

बेझचे प्रमेय अनेक क्षेत्रात वापरले गेले असून त्याची गणिती व्यापकता बरीच वाढली आहे.

उपयुक्तता

वरील चर्चा आणि उदाहरणांवरून संभाव्यता मोजण्याचे गणित सोपे आणि सहज जमण्यासारखे आहे हे लक्षात येते. विविध उपयोजनांसाठी संभाव्यातेचे मोजमाप फार उपयुक्त आहे हे देखील स्पष्ट आहे. वर्गात संभाव्यतेची संकल्पना शिकवताना मंनोरंजक उदाहरणे दिल्यास ती विद्यार्थ्यांना समजण्यास बरीच मदत मिळते. त्यासंबंधी भरपूर पुस्तके व इतर साहित्य उपलब्ध आहे. मानवी जीवनातील अनिश्चितता अनेक मार्गाने पुढे येत असल्यामुळे संभाव्यतेचे गणित विकसित करत राहाणे हे निश्चित आहे, म्हणजेच या विषयात संशोधनाला भरपूर वाव आहे.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

पूरक माहिती :

- लेखातील चौकटीत उल्लेख केलेल्या टनब्रिज वेल्स या इंग्लडमधील लहान गावाशी भारतीय क्रिकेटचा एक संस्मरणीय संबंध आहे. १९८३ मधील मर्यादित षटकांच्या विश्वचषक क्रिकेट स्पर्धेतील भारताचा एक सामना इथे झाला होता. त्या सामन्यात झिम्बावेसारख्या नवोदित संघाविरुद्ध प्रथम फलंदाजी करत असलेल्या भारताचा अर्धा संघ फक्त १७ धावांत गारद झाला होता. त्या नाजूक परिस्थितीत कर्णधार कपिल देवने नाबाद १७५ धावांची झुंजार खेळी केली. त्यामुळे तो सामना व त्या प्रोत्साहनाने पुढे तो विश्वचषक भारताने जिंकून क्रिकेट जगतात एक इतिहास घडवला.
- गणित तसेच इतर विषय शिकवताना अशा रंजक बाबींची सांगड घालणे उपयुक्त ठरते असा अनुभव आहे.
- क्रिडा-सांख्यिकी अशी नव्या प्रकारची कारकीर्द घडवण्यासाठी सदर तऱ्हेची महत्त्वपूर्ण माहिती इच्छुकांनी गोळा करणे उपयुक्त ठरेल.

⌘⌘⌘

२४

वाटचाल विमा गणिताची

मानवी व्यवहार मोठ्या व्यापाराचे रूप धारण करू लागल्यावर जिवाला आणि / किंवा मालमत्तेला धोका तसेच नुकसानीची अनिश्चितता प्रामुख्याने जाणवू लागली. अर्थातच असा धोका किंवा जोखीम यांनी परिपूर्ण स्थितीवर तोडगा काढण्यासाठी मनुष्याने निरीक्षण, अनुभव आणि बुद्धिमत्तेची जोड देऊन विभिन्न मार्ग शोधले. जोखीम कमी करणे आणि नुकसान झाल्यास त्याची भरपाई योग्य प्रकारे करण्यासाठी काही नियम आणि व्यवस्था विकसित केल्या गेल्या. उदाहरणार्थ याज्ञवाल्क्याचे धर्मशास्त्र, कौटील्याचे अर्थशास्त्र, हामुरबीचे नियम असे अनेक शतके जुने साहित्य या संदर्भात उपलब्ध आहे.

आधुनिक विकास

व्यापारासाठी लांब पल्ल्याच्या समुद्र सफरी वाढू लागल्यावर सागर विमा विकसित करण्यावर जोर वाढला. १३४७ मध्ये अशा प्रकारचे पहिले विमा करारपत्र केले गेले. १६८० मध्ये लंडन येथील एडवर्ड लॉइड यांच्या कॉफी उपहारगृहात सागर सफरीसंबंधी महत्त्वपूर्ण माहितीचे आदान-प्रदान होऊ लागले. त्यामुळे विमा उतरवणारे आणि तो काढून घेण्यास इच्छूक अशा लोकांच्या भेटीचे ते उपहारगृह एक केन्द्रच बनले. त्यातून *लॉइडस ऑफ लंडन* या सागरी विमा उतरवणाऱ्या कंपनीचा उदय झाला व आज देखील ती कंपनी विमा क्षेत्रात अग्रगण्य म्हणून प्रसिद्ध असून कार्यरत आहे हे विशेष. लंडन मधील १६६६ साली लागलेल्या भीषण आगीत १३,२०० इमारती नष्ट झाल्या. त्यावरून बोध घेऊन निकोलस बार्बोन याने १६८० मध्ये *दी फायर हाऊस* या नावाची इंग्लडमधील पहिली आग-विमा कंपनी स्थापन केली.

संख्याशास्त्राचा सहभाग

योगायोग म्हणजे विमा व्यावसायिक पद्धतीने हाताळण्यासाठीचे गणितही स्वतंत्रपणे संभाव्यता सिद्धांत (प्रोबेबिलिटी थेयरी) आणि त्यावर आधारित संख्याशास्त्र (स्टॅटिस्टिक्स), सतराव्या शतकात त्याच सुमारास विकसित होऊ लागले. लंडन, पॅरिस आणि पोलण्डमधील लोकांचा जन्म आणि मृत्यू यांच्या नोंदींचा अभ्यास करून प्रसिद्ध खगोलशास्त्रज्ञ एडमण्ड हॅले (१६५६–१७४२) याने प्रत्येक वयोगटातील मनुष्याचे सरासरी आयुष्य काढण्याची पद्धत विकसित केली. त्यावरून आयुष्य सारणी (लाइफ टेबल्स) तयार करता आल्या व प्रत्येकासाठी आयुर्विम्याचा सुयोग्य हप्ता ठरवता येऊ लागला. अशा प्रकारे गणिताचा आधार घेऊन विमाशास्त्र किंवा विमाविज्ञान (ॲक्चूरिअल विज्ञान) सुरू झाले. यात आयुर्विमा आणि इतर बाबींच्या साधारण विम्याचा समावेश होतो.

विमासंबंधी आकडेमोडीत संपूर्ण संख्याशास्त्राचा मोठा सहभाग आहे. त्याशिवाय आभासकारी पद्धती (सिम्युलेशन मेथड), विसंबनीयता सिद्धांत (रिलायबिलिटी थेयरी), उपयुक्तता सिद्धांत (यूटीलिटी थेयरी), नुकसान सिद्धांत (रूइन थेयरी), गुंतवणूक निवडीचे शास्त्र (पोर्टफोलिओ सिलेक्शन मेथडस्) अशा अर्थशास्त्र व वित्तशास्त्रातील अनेक प्रगत गणिती संकल्पना व रितींचा समावेश विमाविज्ञानात आता केला जात आहे. कुठल्याही कार्यात येऊ शकणारे अडथळे, भरपाई करू लागण्याची शक्यता व त्यानुसार विम्याचा हप्ता ठरवणे आणि घेतलेली जोखीम वितरित करणे अशा अनेक बाबतीत विमा कंपनीला विमाशास्त्रज्ञाचे (ॲक्युअरिचे) ज्ञान आणि अनुभव वापरणे महत्त्वपूर्ण ठरते.

उदाहरण : एक विमा कंपनीचे १००० विमाधारक आहेत. कुठल्याही बाबतीत नुकसान भरपाईची रक्कम रु. ५००० अशी ठरवली गेली आहे. भरपाई मागणी येण्याची संभाव्यता ०.०१ आणि नुकसान भरपाई करावी लागेल अशी संभाव्यता विमा हप्त्यात ०.१ या प्रमाणे आकारली गेली आहे. कंपनीकडे किती प्रमाणात भांडवल पाहिजे की एक वर्षानंतर त्यात तूट न येण्याची संभाव्यता ९९% असली पाहिजे ?

उत्तर : अशा आकडेमोडीसाठी संख्याशास्त्रातील सामान्य वितरण (नॉर्मल डिस्ट्रीब्यूशन) वापरले जाते, कारण काही अपवादात्मक परिस्थिती सोडल्यास प्रत्यक्षात गोष्टी अशा सांख्यिकी सामान्य वितरणाप्रमाणेच घडत असतात असे दीर्घकालीन निरीक्षणे सांगतात. तरी सामान्य वितरणाचे गणिती गुणधर्म आणि तक्ते वापरून वरील प्रश्नाचे उत्तर पुढील सूत्राने काढता येते :

$$\text{अपेक्षित भांडवल} = २.३३ \times ५००० \times \sqrt{(१००० \times ०.०१)}$$
$$- ०.१ \times (१००० \times .०१) \times ५०००$$
$$= \text{रु. } ३२,२८०.$$

कारकीर्दीच्या संधी

ज्या विद्यार्थ्यांना गणित व संख्याशास्त्राची, विशेषकरून आकडेमोडीची आवड आहे, तसेच अनेक तास एकाग्रतेने अकांशी खेळ करण्याची तयारी आहे, त्यांनी विमाशास्त्रज्ञ होण्याचा प्रयत्न जरूर करावा. ॲक्युरिअल सोसायटी ऑफ इंडिया ही संस्था भारतात विमा विज्ञानाचे शिक्षण नियंत्रित करते. हे शिक्षण पूर्ण करण्यास ठराविक मुदत नाही. विमाशास्त्रज्ञ ही पदवी प्राप्त करण्यासाठी एकूण १५ विषयांची परिक्षा देणे भाग असते (पहा : www.actuariesindia.org). त्याशिवाय भारतात अनेक शैक्षणिक संस्था पोस्ट–ग्रेड्यूएट डिप्लोमा इन ॲक्युरिअल सायन्स, एम.एससी, डिप्लोमा तसेच पोस्ट–ग्रेड्यूएट डिप्लोमा इन इन्शुरन्स मार्केटींग अँड रिस्क मॅनेजमेण्ट अशा प्रकारचे अभ्यासक्रम राबवत आहेत.

भारतात आयुर्विमा आणि इतर विमा प्रसारास प्रचंड वाव असल्यामुळे आता राष्ट्रीय महामंडळांबरोबरच अनेक खाजगी कंपन्याना या क्षेत्रात प्रवेश दिलेला आहे. आग, वाहन, स्वास्थ्य व चिकित्सा आणि परिवहन सेवा या क्षेत्रात साधारण प्रकारचा विमा काढला जातो. समाजातील नवीन उलाढालीसोबत साधारण विमाक्षेत्रासाठी नवी दालने उघडतात. उदाहरणार्थ, आंतरराष्ट्रीय क्रीडास्पर्धा जशा की ऑलिम्पिक खेळ, फुटबॉल, टेनिस आदी खेळांच्या मोठ्या स्पर्धा याबाबत विमा उतरवणे काही दशकांपूर्वीच सुरू झाले. अंतराळात उपग्रह सोडणे हे आता मोठ्या प्रमाणावर होऊ लागल्याने अंतराळ विमा काढणे हे एक नवीनच क्षेत्र आता पुढे आले आहे. उपग्रह सोडणे, तसेच तो त्याच्या कक्षेत ठराविक काळापर्यंत कार्यरत राहील या दोन बाबींसाठी विमा उतरवला जातो. अर्थातच त्याची किंमत फारच मोठी असल्यामुळे अनेक कंपन्या एकत्र येऊन जोखीम वितरित करतात. अशा सततपणे नाविन्यपूर्ण विकसित होत जाणाऱ्या तंत्रज्ञानाचा व संलग्न बाबींचा अभ्यास विमाशास्त्रज्ञाला करावा लागतो. नवीन प्रकारच्या घटकांना समाविष्ट करणारे गणित विकसित करणे हे आव्हान विमाविज्ञानाला नेहमीच पेलावे लागणार आहे.

तरी विमागणित आणि विमाविज्ञान या विषयांत शिक्षण, संशोधन आणि कारकीर्द घडवण्याच्या असंख्य संधी उपलब्ध आहेत ज्यांचा लाभ जरूर घ्यावा.

⌘⌘⌘

२५

सरळ रेषेचे गणिती सामर्थ्य

रेषा म्हटली की रामायणातील लक्ष्मणरेषा, आपल्या पृथ्वीची विषुववृत्त किंवा भूमध्यरेषा, भारत-पाक सीमेवरील काश्मीरमधील नियंत्रण रेषा, द्रारिद्र्य रेषा, क्रिकेट, टेनिस व इतर मैदानी खेळातील सीमारेषा अशी अनेक उदाहरणे समोर येतात. त्यातील काही रेषा प्रत्यक्षात आखल्या जाऊ शकतात, तर काहींची फक्त कल्पना करता येते. गणिती दृष्टिने बघितल्यास रेषांचे सहसा दोन विभाग केले जातात : १) सरळ रेषा, आणि २) वक्र किंवा असरळ रेषा. या दोन्ही प्रकारच्या रेषांचे गणित भिन्न आहे व ते इतके व्यापक झाले आहे की केवळ एका प्रकारच्या रेषेचा गणिती अभ्यास करण्यास संपूर्ण आयुष्य कमी पडू शकते. आपण या लेखात फक्त सरळ रेषेच्या गणिताचा निवडक आढावा घेऊ आणि उपयोग बघू.

उगम आणि विस्तार

प्रतल किंवा सपाट भागावरील (प्लेन) दोन बिंदूना सर्वात कमी अंतराने जोडणारी आकृती जिला फक्त लांबी असते, तिला सरळ रेषा म्हणावे अशी व्याख्या युक्लिडने (इ. स. पूर्व ३२५-२६२) आपली भूमिती मांडताना केली. बिंदू आणि सरळ रेषा याना विविध प्रकारे जोडून अनेक आकृत्या (उदा. त्रिभुज, चौकोन, षटकोन) तयार करता येतात. त्यांचे गुणधर्म सांगणारे सिद्धांत हे प्रमेय-सिद्धता या तर्कशास्त्राच्या चौकटीत मांडण्याचे बहुमूल्य योगदान युक्लिडने केले. विशेष म्हणजे आज सुद्धा बहुतेक सर्व अभियांत्रिकी (इंजिनिअरींग) व आरेखन कार्यात सरळ रेषेच्या त्या सर्व नियमांचा वापर केला जातो.

आर. देकार्त (१५९६–१६५०) याने भूमिती व बीजगणिताची सांगड घालून कोओर्डिनेट भूमिती पुढे निर्माण केली. यात सुद्धा सरळ रेषेची समीकरणे ही एक महत्त्वाचा घटक आहेत. अमूर्त स्वरूपात (प, फ) आणि (ब, भ) हे दोन बिंदू दाखवणारे अक्षांश घेतल्यास, त्यांना जोडणाऱ्या सरळ रेषेचे समीकरण असे आहे :

$$ज्ञ - फ = \frac{भ - फ}{ब - प} \times (क्ष - प)$$

उदाहरणार्थ, (–३, १) आणि (४, ७) या बिंदूना जोडणाऱ्या सरळ रेषेचे समीकरण वरील सुत्राप्रमाणे असे असेल :

६क्ष – ७ज्ञ + २५ = ०.

सरळ रेषेचे असे अंकीय किंवा बीजगणिती स्वरूप फारच उपयोगी ठरले आहे. अनेक नैसर्गिक गोष्टी, अर्थशास्त्रातील प्रक्रिया तसेच सामाजिक घटना एक किंवा अधिक सरळ रेषीय समीकरणात मांडता येतात. त्यांना एकत्रपणे सोडवल्यास बहुपयोगी माहिती मिळते, त्याधारे निर्णय घेणे सुलभ होते. याचे एक उत्तम उदाहरण म्हणजे लिनिअर प्रोग्रामिंग या ऑपरेशनल रिसर्चच्या एका महत्त्वपूर्ण शाखेचा उदय. यात सरळ रेषीय बीजगणित (लिनिअर ॲलजेब्रा) मोठ्या प्रमाणात वापरून शेती व्यवस्थापन ते अंतराळात उपग्रह सोडणे अशा असंख्य क्षेत्रात इष्टतम निर्णय घेण्यास सातत्याने मदत होत आलेली आहे.

कुठल्याही वक्ररेषेला सरळ रेषा स्पर्शिका (टँजन्ट) म्हणून ज्या बिंदूवर स्पर्श करेल त्यानुसार कलन किंवा गणनशास्त्रीय म्हणजेच डिफरन्शियल कॅलक्युलसमधील फल प्राप्त करता येते. या तत्वाचा उपयोग प्रत्यक्ष किंवा अप्रत्यक्षपणे भरपूर केला जातो. उदाहरणार्थ, लिनिअर डिफरन्शियल समीकरणे (इक्वेशन्स) भौतिक विज्ञान, रसायन विज्ञान, जीव विज्ञान व अनेक विषयात मूलभूत घटक म्हणून वापरली जातात. अशा सरळ रेषीय समीकरणांची उत्तरे काढण्याच्या प्रभावी पद्धती विकसित करणे हे काम गणितज्ञ सातत्याने करत असतात. त्याचप्रमाणे लिनिअर ट्रांसफर्मेशन ही सरळ रेषीय गणिती पद्धती विविध क्षेत्रात कळीची भूमिका निभावते. म्हणूनच सुलभतेसाठी कुठल्याही बाबीचे सरळ रेषीय गणित प्रथम मांडण्यावर भर असतो.

नवी दिशा

युक्लिडने भूमितीची निर्मिती काही औपचारिक परिभाषा आणि पाच स्वयंसिद्ध गृहीतके (एक्झियम्स) मांडून तर्कशास्त्राचा वापर करून केली. त्याचे पाचवे गृहितक म्हणजे, जर एक सरळ रेषा व तिच्या बाहेर एक बिंदू घेतला तर त्या बिंदूतून त्या रेषेला संमातर अशी केवळ एक रेषा आखता येईल, हे स्वयंसिद्ध आहे की नाही याबाबत गणित क्षेत्रात सांशकता होती. त्यानंतर जवळपास दोन हजार वर्षे लोटल्यावर रशियन गणितज्ञ एन. आय. लोबाश्वेस्कीने १८२९ व स्वतंत्रपणे हंगेरीयन गणितज्ञ जे. बोलाईने १८३२ साली असे सिद्ध केले की जर पाचव्या गृहीतकात ''अनेक समांतर रेषा आखणे'', आणि जर्मन गणितज्ञ बी. रिमानने १८५४ मध्ये त्या गृहीतकात ''एक ही संमातर रेषा न आखता येणे'' असा बदल केला तरी युक्लिडची सर्व प्रमेये सिद्ध करण्यात कुठलीही तार्किक अडचण येत नाही असे दाखवले. मात्र अशा भूमितीचे स्वरूप प्रतल भूमितीपेक्षा निराळे असेल.

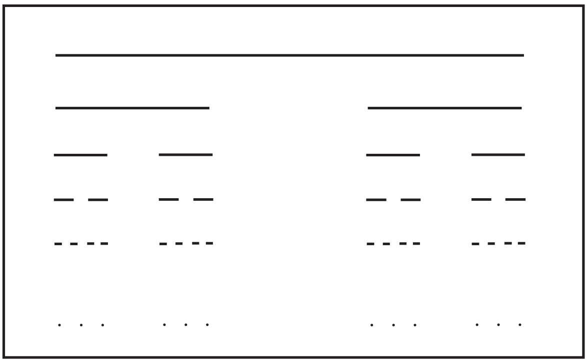
या मार्गाने अनंत प्रकारच्या भूमिती निर्माण करणे शक्य आहे व अशा सर्व भूमितींना नॉन-युक्लिडीयन भूमिती म्हणून संबोधले जाते. विशेष म्हणजे ए. आइनस्टाइनला त्याचा सापेक्षतावाद सिद्धांत विकसित करण्यास रिमानची भूमिती कामी आली. या प्रकारे सरळ रेषेच्या गुणधर्माचा अभ्यास गणिताचे एक नवीन दालन उघडण्यास कारणीभूत ठरला. त्यामुळे अनेक वैज्ञानिक क्षेत्रात अतिशय महत्त्वपूर्ण भर घालणे शक्य झाले व ज्ञानाच्या एकूण कक्षा रूंदावल्या.

सरळ रेषा आणि गणिती अनंत

गणितातील सरळ रेषा आणि अनंताची (इन्फिनिटी) संकल्पना यांचा संबध अनेक प्रकारे जोडला गेला आहे. एक म्हणजे प्रतलावरील सरळ रेषा कुठल्याही बिंदूपासून आखण्यास सुरुवात केल्यास तिचे रेखाटन कधीही संपणार नाही, म्हणजेच तिची लांबी अनंत असेल, तसेच तिच्यावरील बिंदूंची संख्या अनंत असेल. सर्व प्रकारचे धन आणि ऋण पूर्णांक, परिमेय, अपरिमेय व वास्तव संख्याना सरळ रेषेवरील बिंदूनी व्यक्त करणे शक्य आहे, आणि या सर्व अंक आणि संख्यांचे संच किंवा सट (सेट) अनंत आहेत.

अनंत संचांची निर्मिती करण्यासाठी जी. कँटोर (१८४५-१९१८) यांनी सरळ रेषेचा उपयोग अभिनव पद्धतीने केला. त्यांनी असे सांगितले की एकांक लांबीचा एक रेषाखंड घ्या. त्याचे तीन समान भाग करा व मधला भाग काढून

टाका. या क्रियेची पुनरावृत्ती करा. अखेरीस कोणताही मर्यादित आकाराचा रेषाखंड उरणार नाही, कारण तो उरला तर त्याचे पुन्हा विभाजन करावे लागेल. अंततः उरेल तो भिन्न-भिन्न बिंदूंचा संग्रह जो अनंत असून विरळपणे विखुरलेल्या अंकाचा संच असेल. त्याला 'अंकगणितीय' किंवा 'कँटोरची' धूळ असे म्हणतात. या संदर्भात आकृती १ पहा.



आकृती १

या अंकीय धुळीचे गुणधर्म अनेक नावीन्यपूर्ण गोष्टी सांगतात. एक म्हणजे विरळ असून ही हा एक गणनीय नसलेला अनंत संच आहे. मात्र विरळपणामुळे त्याची एकूण लांबी शून्य आहे. हा संच सर्व मापप्रमाणांत स्वयं-समरूपता (सेल्फ-सिमिट्रीकल) असणारा आहे. प्रत्येक पुनरावृत्ती विभाजनाच्या वेळी रेषाखंडाची लांबी ३ पटीने कमी होते, आणि रेषाखंडांची संख्या २ पटीने वाढते. म्हणजेच सदर अंकीय धुळीची मिती ही (लॉग २/ लॉग ३) = ०.६३ (जवळपास) अशी शून्यापेक्षा मोठी पण एकहून कमी अशी अपूर्णांक मिती आहे. एका सरळ रेषेचा संबंध अनंत या संकल्पेनेच्या किती गणिती बाबींशी जुळलेला आहे हे वरील चर्चेवरून लक्षात येते.

भविष्याचे अनुमान

सरळ रेषेचा उपयोग पुढे काय घडू शकते याचा गणिती अंदाज लावण्यासाठी मोठ्या प्रमाणात केला जातो. या साठी संख्याशास्त्रात (स्टॅटिस्टिक्स) एक विशेष पद्धत विकसित केली गेली आहे जिला सरळ रेषीय प्रतिपगमन (लिनिअर रिग्रेशन) असे म्हणतात. जर निरीक्षणांना काळानुरूप

बिंदूनी एका आलेखात मांडले तर त्या बिंदूच्या मधून एक सरळ रेषा सुवर्णमध्य म्हणून आखणे व तिला अंकीय सूत्रात मांडणे शक्य होऊ शकते. सुवर्णमध्य म्हणजे या रेषेच्या वर तसेच खाली काही बिंदू असे असतील की रेषेच्या वर असलेल्या सर्व बिंदूंचे रेषेपासून असलेले अंतर यांची बेरीज आणि रेषे खाली असलेल्या सर्व बिंदूंचे रेषेपासून असलेले अंतर यांची बेरीज जवळपास सारखी असेल. अशी रेषा तशीच थोडी पुढे नेली किंवा तिच्या गणिती सूत्रात जवळच्या भविष्यातील काळ घातला की पुढील भाकित करणे शक्य होते. आपण या संबंधात खालील उदाहरण बघुया.

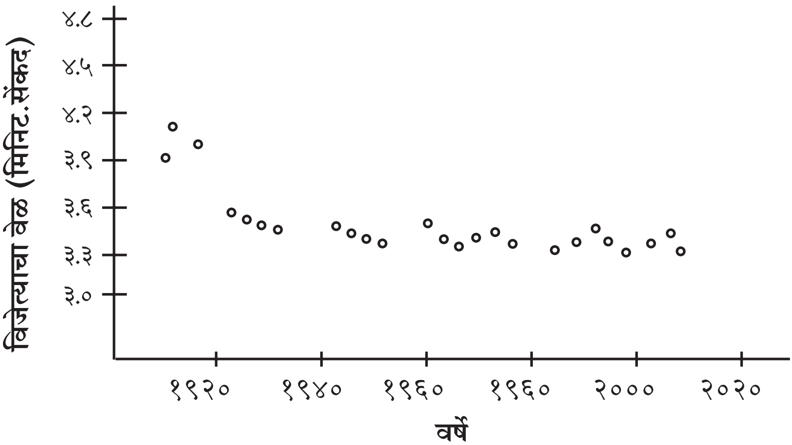
२००८ पर्यंतच्या ऑलिम्पिक खेळात पुरुषांच्या १५०० मी. धावण्याच्या शर्यतीत विजेत्याने घेतलेला वेळ तक्ता १ प्रमाणे आहे. तर २७ जुलै २०१२ रोजी लंडन येथे सुरू झालेल्या ऑलिम्पिक खेळाच्या या शर्यतीत विजेता किती वेळ घेईल याचा अंदाज आपण सदर सरळरेषीय प्रतिपगमन पद्धतीने करू या.

तक्ता १

वर्ष	वेळ (मिनिटे.सेकंद)	वर्ष	वेळ (मिनिटे.सेकंद)
१८९६	४.३३.२	१९६०	३.३५.६
१९००	४.०६.२	१९६४	३.३८.१
१९०४	४.०५.४	१९६८	३.३४.९
१९०८	४.०३.४	१९७२	३.३६.३
१९१२	३.५६.८	१९७६	३.३९.१७
१९२०	४.०१.८	१९८०	३.३८.४०
१९२४	३.५६.६	१९८४	३.३२.५३
१९२८	३.५३.२	१९८८	३.३५.९५
१९३२	३.५१.२	१९९२	३.४०.१२
१९३६	३.४७.८	१९९६	३.३५.७८
१९४८	३.४९.८	२०००	३.३२.०७
१९५२	३.४५.१	२००४	३.३४.१८
१९५६	३.४१.२	२००८	३.३२.९४

टीप : पहिल्या जागतिक महायुद्धामुळे १९१६ आणि दुसऱ्या जागतिक महायुद्धामुळे १९४० व १९४४ साली ऑलिम्पिक स्पर्धा झाल्या नाहीत.

तक्ता १ मधील आकडेवारी असे दाखवते की विजेत्याचा वेळ कमी होत जाण्याचा एकूण कल आहे. मात्र त्यात थोडे उतार-चढाव आहेत. ढोबळ मानाने या निरीक्षणांचा आलेख आकृती २ मध्ये दिला आहे.



आकृती २

या आलेखात तसेच पुढील आकडेमोडीत १८९६ चा वेळ घेतलेला नाही कारण तो बराच मोठा असून नंतरच्या निरीक्षणांपासून फारच वेगळा आहे. अशा निरीक्षणाला अपवादात्मक (आऊटलायर) म्हणून वगळण्यात येते. तरी उर्वरित निरीक्षणांवर सरळ रेषीय प्रतिपगमनाचे गणिती सोपस्कार करून खालील सूत्राने दाखवलेली सुवर्णमध्य सरळ रेषा मिळते :

विजेत्याचा वेळ = १४.६१ - ०.००५७ × वर्ष.

तरी ऑलिम्पिक २०१२ मधील पुरुषांच्या १५०० मी. धावणे या स्पर्धेतील विजेत्याचा संभाव्य वेळ काढण्यासाठी वरील सूत्रात वर्षाचे मूल्य २०१२ असे ठेवल्यास तो वेळ ३.१५ मिनिटे इतका अंदाजित आहे. संख्याशास्त्राप्रमाणे त्याला बिंदूचे अनुमान (पॉइंट एस्टिमेट) असे म्हणतात, जे अचूक असेल असे नसते. या संदर्भात अधिक सखोल गणिती प्रक्रिया करून अचूकता वाढवणे शक्य आहे. अर्थातच २०१२ मधील प्रत्यक्ष

विजेत्याचा वेळ उपलब्ध झालेला आहे. तो आता या निरीक्षणांत पुढे घालून वरील गणिती सूत्र सुधारित करून २०१६ व २०२० च्या स्पर्धाच्या विजेत्याच्या वेळाबाबत अंदाज वर्तवण्यास वापरता येईल. फार दूरच्या स्पर्धेसाठी (उदा. २०६४) अशा सूत्रांचा वापर करू नये.

मोठ्या क्रीडा स्पर्धा व निवडणुका यांचे निकाल त्याचप्रमाणे भविष्यातील लोकसंख्या, ऊर्जा वापर, दुर्घटना आदी बाबतीत गणिती अनुमान सरळ रेषीय प्रतिगमन पद्धतीने काढणे हे मोठ्या प्रमाणावर सर्वदूर केले जाते. या पद्धतीचा बराच गणिती विस्तार झाला असून आर्थिक व वित्त क्षेत्रातील उलाढाली, वैद्यकीय संशोधन, व्यवस्थापन अशा विविध उपयोजन कार्यक्षेत्रांत तिचा भरीव प्रमाणात वापर होतो. ही पद्धती संख्यात्मक संशोधनाचा एक महत्त्वपूर्ण घटक मानली जाते.

एकूण गणिती उपयोग आणि व्यापक उपयोजनासाठी होणारा सरळ रेषेचा वापर बघता तिचे सामर्थ्य किती लक्षणीय आहे हे लक्षात येते.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

पूरक माहिती :

- २०१२ मधील लंडन ऑलिम्पिक खेळात पुरुषांच्या १५०० मी. धावण्याच्या शर्यतीत विजेत्याने घेतलेला वेळ ३.२० मिनिटे इतका होता, तर वरील गणिती पद्धतीने तो ३.१५ मिनिटे असा संभावित केला होता. ही तफावत मान्य करता येईल का ? अशी तफावत कमी करण्यासाठी काही अतिरिक्त घटक किंवा वेगळ्या प्रकारची गणिती प्रतिकृती वापरणे योग्य ठरेल का ? असे प्रश्न गणिताच्या उपयोजन क्षमतेत वाढ करण्यास मदतशीर ठरतात.

⌘⌘⌘

२६

गणित गुन्हे तपासणीचे

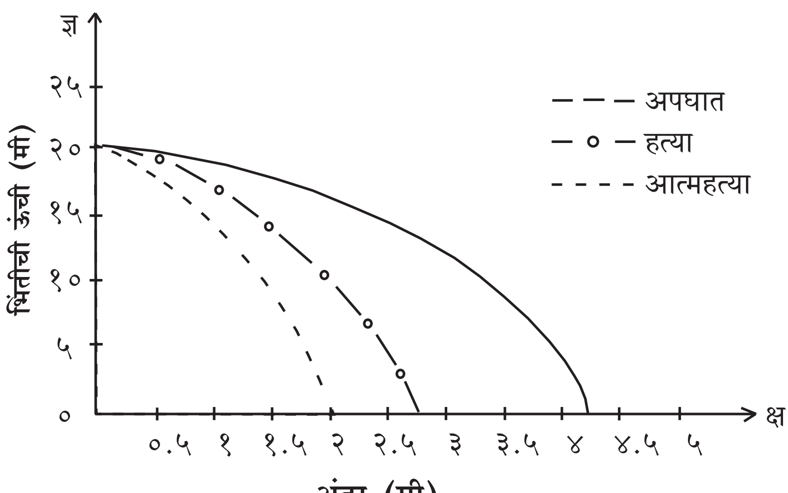
रहस्यमय गुन्ह्याची तपासणी करून प्रत्यक्ष गुन्हेगार पकडून त्यास/त्यांना न्यायालयाकडून योग्य शिक्षा घडवणे ही संपूर्ण प्रक्रिया सर्वसामान्यांना रोचक वाटते यात शंका नाही. म्हणूनच अनेक वर्तमानपत्रे, कथा व कादंबऱ्याची पुस्तके आणि मासिके तसेच दूरचित्रवाणीवरील मालिका आणि सिनेमा अशा प्रकारच्या सत्य किंवा कल्पित घटनांवर आधारित असतात आणि त्यांना बहुधा चांगला प्रतिसाद मिळतो. सर आर्थर कॉनन डॉयल (१८५९–१९३०) यांनी शेरलॉक होम्स या कल्पित खाजगी अजरामर केलेल्या गुन्हाशोधक व्यक्तिरेखेद्वारे गुन्हा तपासणी हे मुळात तर्कशास्त्र वापरणे आहे असे फारच प्रभावीपणे सादर केले. आजही शेरलॉक होम्सच्या कथा आणि कांदबऱ्या तेवढ्याच लोकप्रिय आहेत कारण त्यांची एका अर्थाने मांडलेली गणिती बैठक (अधिकतर डिडक्शन अर्थात निगमन प्रक्रिया) चकित करते, तसेच भाषा व शैली अतिशय उत्कंठा वाढवणारी आहे.

हल्लीच्या जगात गुन्हा तपासणीसाठी विज्ञानाच्या विविध शाखांचा आधार फार मोठ्या प्रमाणावर घेतला जातो. उदाहरणार्थ, रक्तगट तपासणी, पिस्तुलाच्या गोळीची दिशा ठरवणे, जनुक तपासणी, बोटांचे ठसे जुळवणे, फरारी संशयिताचे चित्र व वर्णन तयार करणे, अशा असंख्य घटकांसाठी जीव विज्ञान, भौतिक विज्ञान, रसायन विज्ञान, संगणक तंत्रज्ञान आदींची भरघोस मदत घ्यावी लागते. गुन्हा तपासून संशयित व्यक्ती गुन्हेगार आहेत हे न्यायालयात सिद्ध करण्यासाठी वरील सगळ्या प्रक्रिया वैज्ञानिक पद्धतीने करून ग्राह्य पुरावा म्हणून मांडाव्या लागतात. या सर्व बाबींना समाविष्ट करणारे असे एक उपयोजन शास्त्र, *गुन्हा*

अन्वेषण विज्ञान (फॉरेन्सिक सायन्स), याची निर्मिती आता झाली आहे. त्यामध्ये गणिताचा थेट किंवा इतर विज्ञानाच्या माध्यमातून वापर हा फार महत्त्वाचा ठरतो. प्रस्तुत लेखात गणिताचा उपयोग गुन्हे तपासणीसाठी कसा होतो याची निवडक उदाहरणे दिली आहेत. तसेच काही प्रश्नांसाठी गणित व संलग्न शाखांतील पद्धतींचा संक्षिप्त आढावा दिला आहे.

हत्या, आत्महत्या की अपघात ?

अनेक वेळा एखाद्या उंच इमारतीच्या भिंतीच्या पायथ्यापासून काही अंतरावर सापडलेल्या मृतदेह गूढ निर्माण करतो. कारण मृत्यु हा कोणी वरून ढकलल्यामुळे, स्वतः उडी मारल्यामुळे किंवा अचानक पाय घसरणे किंवा तोल जाणे यामुळे झालेला असू शकतो. अभ्यास असे दाखवतात की मृतदेह भिंतीच्या पायथ्यापासून किती अंतरावर सापडला यावरून तो वरून कुठल्या कारणामुळे पडला असेल हे शोधता येते. जर व्यक्तीचा तोल गेला असेल किंवा पाय घसरला असेल तर सुरवातीची खाली येण्याची तिची गती सर्वात कमी व कोन शून्य अंशाचा असतो. जर त्या व्यक्तीने स्वतःहून उडी मारली असेल तर खाली येण्याची सुरवातीची गती आणि कोन बराच मोठा असेल. जर त्या व्यक्तीला वरून कोणी ढकलले असेल तर त्याची खाली येण्याची गती व कोन मध्यम असा असतो. या शक्यता आकृती १ मध्ये कल्पित रूपात दाखवल्या आहेत.



आकृती १

भौतिकशास्त्राच्या प्राथमिक गती सिद्धांतावरून व्यक्ती खाली येण्याचा प्रक्षेपपथ किंवा विक्षेपमार्ग (ट्रॅजेक्टरी) खालील गणिती सूत्राने मांडता येतो :

$$ज्ञ = च + (टॅन \varnothing)\ क्ष - \frac{ग}{२ \times अ^{२}\ कॉस^{२}\ \varnothing}\ क्ष^{२} \quad \ldots (१)$$

यामध्ये भूपातळी ज्ञ = ० मानली आहे, च म्हणजे ज्या उंचीवरून देह खाली देणे सुरू झाले, ∅ हा ज्ञ अक्षाबरोबरचा आरंभीचा कोन, अ ही आरंभीची गती आणि गुरूत्वीय त्वरण (ॲक्सलेरेशन) ग = ९.८१ मी./$(सेकंद)^{२}$.

आपण या सूत्राधारे तीन परिस्थिती बघुया :

१) ज्ञ = ०, च = ५० मी., ∅ = ३५° आणि अ = ३.५ मी./सेकंद असे वरील सूत्र (१) मध्ये ठेवले की,

$$० = ५० + (टॅन\ ३५^{\circ})\ क्ष - \frac{९.८१}{२ \times (३.५)^{२}\ कॉस^{२}\ ३५^{\circ}}\ क्ष^{२}$$

म्हणजेच,

$$०.५९७\ क्ष^{२} - ०.७०\ क्ष - ५० = ०$$

नेहमीची वर्ग समीकरण सोडवण्याची पद्धत वापरून :

$$क्ष = \frac{०.७ \pm \sqrt{०.४९ + ११९.४}}{१.१९}$$

$$= ९.७९\ मी. \Rightarrow$$ *आत्महत्या.*

२) ज्ञ = ०, च = ५० मी, ∅ = १५° आणि अ = २ मी./सेकंद असे वरील सूत्र (१) मध्ये वापरले आणि गणिती प्रक्रिया केल्यास क्ष = ६.२८ मी. ⇒ *हत्या.*

३) ज्ञ = ०, च = ५० मी., ∅ = ०° आणि अ = १ मी./सेकंद असे वरील सूत्र (१) मध्ये वापरल्यास
क्ष = ३.२० मी. ⇒ *अपघात.*

प्रत्यक्षात या अंतरावरून आरंभीच्या गतीचा अंदाज घेऊन काय घडले असेल याबाबत निष्कर्ष काढला जातो, जो पुढील तपासाची दिशा ठरवतो.

साक्षीदाराचे चक्षुसत्य

अनेक वेळा संशयिताला गुन्हा करताना पाहिले असल्याचे सांगणारे काही साक्षीदार पुढे येतात. त्यांनी ती घटना सहसा काही अंतरावरून पाहिली असते. त्यामुळे त्यांची दृष्टिक्षमता लक्षात घेऊन त्या अंतरावरून त्यांनी केलेले वर्णन बरोबर आहे की नाही याची काळजीपूर्वक तपासणी करावी लागते. त्याचे गणित साधे आहे हे खालील चर्चेतून लक्षात येईल.

आदर्श दृष्टिक्षमता असलेला माणसाचा डोळा कुठल्याही साधनाचा वापर न करता (उदा. चष्या, दूर्बिण) वस्तू अचूकपणे ओळखू शकेल याचे मापन वैद्यकीय शास्त्राप्रमाणे कोनीय किंवा अणीदार पृथक्करण (अँग्युलर रेझोल्यूशन) याने दर्शवले जाते. हीची मर्यादा ०.०००३ रेडियन्स अशी असते. याचा अर्थ एखाद्या वस्तूचे दोन वेगवेगळे घटक हे डोळ्यांमध्ये दिसताना सदर मर्यादेपेक्षा मोठा कोन बनवत असतील तरच ते वेगळे आहेत असे डोळा ओळखू शकतो. म्हणजेच जर हा कोन ०.०००३ रेडियन्सपेक्षा कमी असेल तर डोळ्याला त्यांना वेगवेगळे ओळखणे शक्य होत नाही. गणिती भाषेत, जर 'ड' हे दोन घटकांमधील अंतर आहे आणि 'ल' अंतरापासून त्यांचे निरीक्षण केले गेले असल्यास, त्या दोन घटकांचे वेगळेपण (ड/ल) याचे मूल्य ०.०००३ पेक्षा अधिक पाहिजे (ड / ल ≥ ०.०००३).

उदाहरण : आदर्शवत दृष्टी असलेल्या साक्षीदाराने दिवसाच्या सूर्यप्रकाशात १८० मी. अंतरावरून संशयिताला पाहिले असून त्या संशयिताने घातलेल्या शर्टावर उभे समांतर पट्टे होते व त्या पट्ट्यांतील अंतर ४ से.मी. (म्हणजेच ०.०४ मी.) होते असे नोंदवले. त्याचे हे निरीक्षण बरोबर आहे का हे वैज्ञानिकदृष्ट्या तपासण्यासाठी आपण वरील सूत्राचा वापर करू या. इथे ड = ०.०४ मी. आणि ल = १८० मी. असे आहे. तरी, ड/ल = ०.०००२२ रेडियन्स हे मूल्य ०.०००३ रेडियन्सपेक्षा कमी आहे. त्याचा अर्थ त्या अंतरावरून पट्ट्यांची अशी ओळख होणे शक्य नाही असा निष्कर्ष निघतो. यावरून असे ही म्हणता येईल की ०.०४/०.०००३ = १३३ मी. (जवळपास) किंवा त्याहून कमी अंतर घटनास्थळापासून निरीक्षकाचे जर असेल, तर त्याचे म्हणणे बरोबर मानण्यास वाव होता.

खरे की खोटे ?

खाण्याचा किंवा अन्य पदार्थांत भेसळ करणे हा एक गुन्हा आहे. असे पदार्थ तपासून त्यातील भेसळ किती प्रमाणात आहे किंवा त्या पदार्थांची शुद्धता

प्रमाणित शुद्धता मर्यादेच्या बाहेर आहे का हे तपासावे लागते. याचे गणित हे पदार्थाचे रूप जसे की घन, द्रव, वायू तसेच रासायनिक गुणधर्म म्हणजे घनता, चिकटपणा, जहालता इत्यादी घटकांवर अवलंबून असते. त्याशिवाय असे घटक मोजताना मोजणी साधनांची अचूकता कितपत आहे हे पण लक्षात घ्यावे लागते. या संबंधात आपण खालील उदाहरण बघुया.

उदाहरण : पोलीसांना एका धाडीमध्ये सापडलेली सोन्याची बिस्किटे भेसळयुक्त आहेत असा संशय आला. ही बिस्किटे घनाकृती आकाराची असून प्रत्येक बिस्किट ११.६ सेमी × १५.० सेमी × २३.८ सेमी या मापाचे आणि प्रत्येकाचे वजन ७२ किलोग्रामस् असे आहे. बिस्किटाची प्रत्येक बाजू मोजण्यात ०.१ सेमी तसेच, वजन मोजण्यात ०.३ किलोग्रामस् अशी अनिश्चितता (चूक होण्याची शक्यता) आहे. तरी या बिस्किटांच्या सोन्याच्या खरेपणाबाबत काय निष्कर्ष काढता येईल ?

बिस्किटाची लांबी, रूंदी व जाडी क्रमशः अ, ब, क आणि वजन म असे मानल्यास, त्याची घनता घ अशा प्रकाराने मांडता येते :

$$\text{घ} = \frac{\text{म}}{\text{अ} \times \text{ब} \times \text{क}} = \frac{७२}{११.६ \times १५.० \times २३.८ \times १०^{-६}} = १७,३८६ \text{ किग्रा/मी}^{३}$$

जर $\triangle$अ, $\triangle$ब, $\triangle$क आणि $\triangle$म हे क्रमशः मापे आणि वजन मोजणीतील अनिश्चिती दाखवत असतील, तर घनता मोजणीतील अनिश्चिती $\triangle$घ ही,

$$\triangle\text{घ} = \text{घ} \times \sqrt{\left(\frac{\triangle\text{अ}}{\text{अ}}\right)^{२} + \left(\frac{\triangle\text{ब}}{\text{ब}}\right)^{२} + \left(\frac{\triangle\text{क}}{\text{क}}\right)^{२} + \left(\frac{\triangle\text{म}}{\text{म}}\right)^{२}}$$

$$= १७३८६ \times \sqrt{\left(\frac{०.१}{११.६}\right)^{२} + \left(\frac{०.१}{१५.००}\right)^{२} + \left(\frac{०.१}{२३.८}\right)^{२} + \left(\frac{०.३}{७२}\right)^{२}}$$

$$= २१६ \text{ किग्रा./(मी)}^{३}$$

म्हणजे सापडलेल्या बिस्किटांच्या सोन्याची घनता घ = १७,३८६ ± २१६ किग्रा/(मी)^{३} अशी आहे. शुद्ध सोन्याची प्रमाणित घनता १९,३०० किग्रा/(मी)^{३} अशी असते. याचा अर्थ सापडलेली बिस्किटे खऱ्या सोन्याची

नाहीत असा आहे, कारण त्या सोन्याची घनता व खऱ्या सोन्याच्या घनतेत बरीच तफावत आहे (फरक १% हून अधिक आहे).

आर्किमिडीज बाबत 'यूरेका-यूरेका' ही आख्यायिका आणि त्याने या संदर्भात केलेल्या प्रसिद्ध प्रयोगाची आठवण वाचकांना कदाचित या उदाहरणावरून होईल.

नवी आव्हाने

वरील नमुनादाखल उदाहरणांवरून गुन्हे अन्वेषणात गणितविज्ञानाचा मोठा सहभाग असल्याची कल्पना येते. त्या व्यापकतेची अधिक कल्पना येण्यासाठी सोबतचा तक्ता १ बघावा. या तक्त्यात गुन्हे तपासणीचे काही महत्त्वाचे घटक आणि त्यासाठी वापरल्या जाणाऱ्या गणित व संख्याशास्त्रातील पद्धती सूचित केल्या आहेत. अर्थातच ही यादी संपूर्ण नाही हे लक्षात येईल.

तक्ता १ : गुन्हे तपासणीत निवडक गणिती पद्धतींचे योगदान

क्र.	तपासणी घटक	गणितशास्त्रातील पद्धती
१	रक्ताच्या डागांची घनता	महत्त्वमापन (मेन्सुरेशन)
२	पिस्तुलाचा प्रकार व त्याच्या गोळीचा प्रवास शोधणे	प्रक्षेपपथ (ट्रिजेक्टरी) विश्लेषण
३	शरीरातील अल्कोहोलची मात्रा	बीजगणितातील सरळरेषीय समीकरणे (लिनिअर इक्वेशन्स)
४	स्फोटाच्या क्षेत्राचा अभ्यास	बीजगणितातील असरळ रेषीय समीकरणे (नॉनलिनिअर इक्वेशन्स)
५	मृतदेहाच्या तापमानावरून मृत्यूची वेळ ठरवणे	लॉगरिथमिक फल (फंक्शन) विश्लेषण
६	उंच इमारतीत चोराने बाहेरून प्रवेश कसा केला ?	त्रिकोणमितीतील (ट्रिग्नोमेट्री) सूत्रे व संरचना
७	मृतदेहाच्या हाडे किंवा दाताच्या परिक्षणावरून त्या व्यक्तीचे वय ठरवणे	सरळरेषीय प्रतिपगमन (लिनिअर रिग्रेशन) विश्लेषण

८	संशयिताच्या बूटात सापडलेले काचेचे तुकडे हे गुन्ह्याच्या जागी पडलेल्या काचेच्या तुकड्यांशी मेळ खाण्याची शक्यता	संभाव्यता सिद्धांताचे (प्रॉबॅबिलिटी थेयरी) विविध प्रकार
९	हाताच्या बोटांची ठसे तपासणी व डीएनए चाचणीच्या निष्कर्षांचे अर्थ लावणे	संख्याशास्त्रातील काही वितरणांचा वापर (उदा. बायनोमिअल, पॉयसों)
१०	हस्तलिखित मजकूर संशयिताने लिहिल्याचे तपासणे व तत्सम तुलनात्मक प्रक्रियांचा अर्थ लावणे	सिद्धांतकल्पना (हायपोथिसिस) तपासण्याच्या संख्याशास्त्रातील पद्धती

टीप : वरील व इतर अनेक गणिती पद्धती स्वतंत्रपणे किंवा विज्ञानाच्या विविध शाखांतील संकल्पना, प्रतिकृती (मॉडेल्स) आणि उपयोजनांचा आधार घेतात किंवा त्यांची मांडणी करून निष्कर्ष काढण्यास मदत करतात.

पारंपारिक गुन्हे या सोबत संगणक व आंतरजाळे (इंटरनेट) यांनी निर्माण केलेल्या सायबर विश्वामुळे निर्माण झालेले सायबर गुन्हे तपासणी हे नवीन आव्हान आता पुढे आले आहे. त्या दृष्टीने गणितातील अनेक प्रगत पद्धती व त्यांना संगणक तंत्रज्ञानाची जोड देऊन गुन्हे तपासणीची आधुनिक तंत्रे विकसित केली जात आहे. या संदर्भात बरीच पुस्तके, शोधनिबंध व तांत्रिक लेख असलेली नियतकालिके आणि संकेतस्थळे (वेबसाईट) उपलब्ध आहेत. उदाहरणार्थ, *फॉरेन्सिक सायन्स इंटरनॅशनल* आणि *जर्नल ऑफ फॉरेन्सिक सायन्स* ही जर्नल विशेष उपयोगी आहेत.

तरी विद्यार्थीवर्गाने गणित व त्याच्या संलग्न शाखात प्रावीण्य मिळवून गुन्हे तपासणी क्षेत्रात कारकीर्द करण्याची आखणी करावी. रसायन विज्ञान, जीव विज्ञान आणि वैद्यकीय शास्त्रात पदवी असलेल्या व्यक्तींनी फार्माकायनेटीक्स, फॉरेन्सिक जेनेटीक्स, डर्मेटोग्लाफिक्स अशा गणिती पद्धती वापराचे कौशल्य मिळवले तर त्यांना ह्या क्षेत्रात मोठ्या संधी उपलब्ध होऊ शकतात. थोडक्यात गुन्हे अन्वेषणात गणिताच्या वापराला मर्यादा दिसत नाही.

ꕥꕥꕥ

२७

गणित मानव-यंत्र विश्वासाहर्ततेचे

आजच्या युगात उत्पादन क्षेत्र असो किंवा सेवा क्षेत्र, एकूण स्पर्धा तीव्र स्वरुपाची झाली आहे यात शंका नाही. मुख्य म्हणजे ती आता स्थानिक किंवा एका भौगोलिक क्षेत्रापुरती मर्यादित राहिली नसून जागतिक स्तरावर पसरलेली आहे. अशा आर्थिक उदारीकरण झालेल्या काळात टिकून राहण्यासाठी वस्तू उत्पादक आणि सेवा पुरवठादारांना त्यांचा माल व सेवा यांचा दर्जा, किंमत, कल्पक संरचना, नावीन्य आणि जाहिरात अशा विविध घटकांचा सातत्याने विचार करावा लागतो.

कळीच्या बाबी

मालाचा दर्जा आणि उपभोकत्याला त्यासाठी द्यावी लागणारी किंमत या दोन बाबी कळीच्या ठरतात. सहसा हे घटक एकाच दिशेने प्रभाव पाडताना आढळतात. म्हणजे दर्जा वाढवला की किंमत देखील वाढवावी लागते. काही उत्पादक किंमत थोडी अधिक ठेवावी लागली तरी चालेल, पण मालाचा दर्जा म्हणजे त्याची विश्वासाहर्तता, क्षमता आणि आयुष्य अधिक असो, असा दृष्टिकोन बाळगतात. उदाहरणार्थ, जर्मनीतील अनेक उत्पादने अशी असतात. त्या उत्पादकांच्या मते वस्तू दीर्घकाळ चांगल्या क्षमतेने कार्यरत राहिल्यास, सुरवातीस थोडी अधिक दिलेली किंमत ग्राहकासाठी पूर्णपणे वसूल होते. मात्र काही उत्पादक किंमत कमी ठेवणे, दर्जा सुमार असला तरी चालेल, या मताचे असतात. चीनने आंतरराष्ट्रीय बाजारपेठा काबीज करण्यासाठी या धोरणाचा स्वीकार केलेला दिसतो. ग्राहक कमी किंमतीमुळे आकृष्ट होतो, तसेच उत्पादन थोड्या काळानंतर काम करत नसल्यास ते टाकून देऊन त्या बदली नवीन घेण्याच्या मानसिक स्थितीत

असतो, हे या धोरणाचे मर्म आहे. अर्थातच या धोरणांचे यश उत्पादनाच्या प्रकारावर ही अवलंबून असते. अर्थशास्त्रातील अशा अभ्यासांचे गणित अनेक मानवी मनोव्यापारांवर प्रकाश टाकते.

गणिती पद्धत

आपण इथे मालाचा दर्जा राखणे या बाबीवर लक्ष केन्द्रित करणार आहोत. जरी कित्येक कारखान्यांत उत्पादन प्रणाली संपूर्ण स्वयंचालित करून मालाचा दर्जा एक सारखा राखणे व अविरतपणे माल तयार करणे असे केले जात असले, तरी अनेक उत्पादनांसाठी आजही मानव आणि यंत्र या दोघांचा समन्वय साधून प्रक्रिया कराव्या लागतात. यंत्राची विश्वासाहर्तता मोजणे हे बरेच प्रमाणात सोपे असते. त्या तुलनेत माणसाची (कामगाराची) त्याच्या कामाच्या बाबतीतील विश्वासाहर्तता मोजणे कठीण असते. विश्वासाहर्तता मोजण्यासाठी 'रिलायबिलिटी सिद्धांत' अशी एक संख्याशास्त्रावर आधारलेली उपशाखा निर्माण झाली असून ती ऑपरेशनल रिसर्चचा एक भाग झाली आहे. वरील प्रश्नाचा अभ्यास करण्यासाठी मानवी विश्वासाहर्तता (ह्युमन रिलायबिलिटी) मोजमापन व अंदाज लावणे असे खास अभ्यास गेली काही वर्षे हाती घेतले जात आहेत. मानव-यंत्र परस्पर संबंधाचे गणिती विश्लेषण करून मानवी चूका कमी करण्याचे उपाय सुचवणे असे त्यांचे उद्देश असते.

यासाठी कुठल्याही प्रक्रियेमध्ये मानव व यंत्र यांचा परस्पर सहभाग असलेले घटक प्रथम विचारात घेऊन त्यांची यादी बनवली जाते. तसेच प्रत्येक यंत्र व प्रक्रियेच्या संदर्भात मानवी चुका कशा प्रकारच्या होऊ शकतात याची यादी बनवली जाते. नंतर काही काळ निरीक्षण करून चूक होण्याची गणिती संभाव्यता (प्रोबेबिलिटी) मांडली जाते. प्रत्येक चूक कितपत गंभीर आहे याचा विचार केला जातो. या चुकांचा एकमेकांशी सहसा काही संबंध नसतो हे गृहीत धरून एकूण व्यवस्था किती विश्वासपूर्ण आहे, याचे गणिती उत्तर काढले जाते. ती अपेक्षेपेक्षा कमी असल्यास प्रत्येक चूक किंवा अतिशय गंभीर वाटणाऱ्या चुका सुधारण्यासाठीचे पर्याय शोधले जातात. त्यातील इष्टतम वाटणारा पर्याय, जसे की कामगाराला परत प्रशिक्षण देणे किंवा यंत्राजवळील प्रकाश वाढवणे, असा आमलात आणला जातो. काही काळानंतर परत असा अभ्यास करून मानवी विश्वासाहर्तता वाढली किंवा कसे हे तपासले जाते. चुका सुधारण्यासाठी वापरलेल्या पर्यायाची किंमत एकूण मालाच्या किंमतीत कशी समाविष्ट करायची याचा निर्णय घेणे भाग असते.

उदाहरण

एक तयार कपडे उत्पादन करणाऱ्या कारखान्यात कामगार कपडे शिवणकाम करणे व यंत्र वापरणे या बाबतीत सात प्रकारच्या चुका करतो, ज्या सर्व गंभीर स्वरूपाच्या आहेत. तशा किती वेळा घडल्याची नोंद करून संभाव्यता काढलेली आहे, तसेच ते घडण्यासाठी शक्य असलेली प्रमुख कारणे व ती टाळण्याचा इष्टतम पर्याय शोधलेला आहे. ही सर्व माहिती तक्ता १ मध्ये मांडली आहे.

तक्ता १

क्र.	कामाचा घटक	मानवी चूक	चूक घडण्याची संभाव्यता ($प_क$)	चुकीचे मुख्य कारण	चूक टाळण्याचा इष्टतम उपाय
१	शिलाई	असमान शिलाई	०.१०	प्रशिक्षण नसणे	प्रशिक्षण देणे
२	खिसा	लावण्यास विसरणे	०.०५	विसर पडणे	असा नग पुढे न जाता परत येईल अशी व्यवस्था करणे
३	कापडाचा पोत	निवड चुकणे	०.०८	प्रशिक्षण कमी पडणे	प्रशिक्षण सुधारणे
४	आकृतिबंध (डिझाइन)	संरचना बिघडणे	०.०७	यंत्राची लय किंवा गती बिघडणे	यंत्र देखभाल वाढवणे
५	रंग-संगती	चुकीचा रंग-धागा वापरणे	०.१५	प्रकाश कमी असणे	प्रकाश व्यवस्था वाढवणे
६	धागा तणाव	धागा तुटणे	०.०९	यंत्र दोष व मानवी दुर्लक्ष	यंत्र देखभाल आणि प्रशिक्षण सुधारणे
७	प्रतिकृती प्रमाणे नग असणे	विसंगती असणे	०.१०	प्रकाशाची कमी आणि बसण्याचे स्थान नीट नसणे	यंत्र तपासणे, प्रकाश वाढवणे व खुर्चीची उंची नीट करणे

तरी संख्याशास्त्राच्या नियमाप्रमाणे यंत्रणा अयशस्वी ठरण्याचा दर, $फ = १ - [(१-प_{१}) \times (१-प_{२}) \times .... \times (१-प_{७})]$ आणि यंत्रणेची एकूण विश्वासाहर्तता, $व = १- फ$.

तक्ता १ मधील $प_{क}$ (क = १, २,...., ७) चे मूल्य वापरून सदर शिवण यंत्रणेसाठी फ = १ - ०.५०९३ = ०.४९०७ आणि विश्वासाहर्तता व = १ - ०.४९०७ = ०.५०९३ अशी प्राप्त होते.

याचा अर्थ केवळ सुमारे ५१ टक्के अशी या मानव-शिवणयंत्र व्यवस्थेची विश्वासाहर्तता दिसून येते जी खचितच कमी आहे. तरी व्यवस्थापन खालील काही उपाय आमलात आणून त्यात सुधारणा घडवू शकते :

- यंत्र देखभाल सुधारणा
- केवळ काही भाग (उदा. खिसा) नसलेला नग पूर्ततेसाठी परत पाठवण्याची व्यवस्था करणे
- प्रशिक्षण कार्यक्रमात सुधार करणे
- प्रत्येक कार्यपाळी सुरू करण्यापूर्वी कामगारांना प्रक्रियेत काही बदल केला असल्यास सुचना अवश्य देणे
- कामगारांकडून प्रकाशव्यवस्था, बसण्याचे स्थान याबाबत वेळोवेळी माहिती घेणे

उपयुक्तता व वाव

या उदाहरणावरून लक्षात येईल की गणित व संख्याशास्त्र यांचा प्रत्यक्षात वापर इतर प्रक्रियांशी कशा प्रकारे जोडला जातो व त्यांचे मार्गदर्शन कसे उपयोगी पडते. संगणकासाठी विकसित केल्या जाणाऱ्या आज्ञाप्रणाली (सॉफ्टवेअर) परिपूर्ण करण्यासाठी सॉफ्टवेअर कंपन्यांना याचा वापर अतिआवश्यक आहे. मानव-यंत्र परस्पर संबंधात मानवाची विश्वासाहर्तता वाढवणे अधिकाधिक महत्त्वाचे होत जाणारे असल्यामुळे या विषयाच्या गणिती व इतर अभ्यासाला भरपूर वाव आहे.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

२८

टपाल तिकीटे आणि गणित

कुरिअर तसेच इ-मेलने संदेश व इतर वस्तुंची देव-घेव करणे मोठ्या प्रमाणात वाढेपर्यंत बहुतेक सर्व टपाल पोस्टाची तिकीटे लावून पाठवणे असे होत असे. विविध देशांची बहुरंगी आणि वेग-वेगळ्या किमतींची टपाल तिकीटे संग्रहित करून त्यांचे अल्बम वर्गवारीने बनवणे हा एक छंद मोठ्या प्रमाणावर त्यामुळे जोपासला गेला आहे. अशा तिकीटांची प्रदर्शने आणि लिलाव आपल्या व अन्य देशात नियमितपणे होतात.

गणिती टपाल तिकीटांचा मागोवा

गणिती संकल्पना, संस्था, गणितज्ञ आणि गणिताशी संबंधित उल्लेखनीय घटनांच्या स्मृतिप्रीत्यर्थ वेळोवेळी टपाल तिकीटे छापली गेली आहेत हे विशेष. महत्त्वाची बाब म्हणजे अशी तिकीटे त्या देशांनी देखील प्रसिद्ध केली आहेत ज्यांचा त्या गणिती विकासाशी काही ही संबंध आलेला नाही. उदाहरणार्थ, निकारागुआ या देशाने १९७१ मध्ये १० टपाल तिकीटे छापली ज्यापैकी प्रत्येक एका गणिती सूत्राला वाहिलेले होते, जे त्याच्या मते वैज्ञानिक क्रांति घडवणारे ठरले होते.

अनुरूप टपाल तिकीटांना निवडून व्यवस्थितपणे मांडून गणिताचा इतिहास लहान चित्ररूपातून सादर करणे हे उपयोगी शिक्षण-साधन होऊ शकते. त्याचे एक उत्तम उदाहरण म्हणजे प्राध्यापक आर. जे. विल्सन यांचे २००१ साली प्रसिद्ध झालेले, 'स्टॅम्पिंग थ्रू मॅथमॅटिक्स' हे पुस्तक. यात एकूण गणिताचा इतिहास, उपयोजन, साधने आणि संकल्पना ११० पानात तिकीटाद्वारे सादर केल्या आहेत. पुस्तकाच्या उजव्या पानावर गणितविषय-विशेष अशी सरासरी

७ तिकीटे व त्यातील प्रत्येकाचे चपखल वर्णन त्याच्या डाव्या पानावर दिले आहे. जगातील जवळपास प्रत्येक देशाचे गणिताला वाहिलेले एक तरी तिकीट त्यात आहे, याचा अर्थ गणिताची महती सर्वमान्य आहे हे लक्षात येते. जयपूर येथील वेधशाळा (१९४७), अशोकस्तंभ (१९४७), श्रीनिवास रामानुजन (१९६२) आणि आर्यभट उपग्रह (१९७५) दाखवणारी भारतीय तिकीटे यात आहेत. तसेच वैदिक हस्तलिखित दाखवणारे (१९८०) मॉरिशस आणि भारतीय बुद्धिबळ पट व सोंगट्या दाखवणारी (१९८३) व्हिएतनाम यांची टपाल तिकीटे उल्लेखनीय आहेत (संदर्भ सूचीतील इंग्रजी संदर्भ क्रमांक ३० पहा). अशा प्रकारे गणिताची ओळख आणि व्यापकता मनोरंजकपणे करून दिल्यास विद्यार्थ्यांत गणिताबाबत रस निर्माण होऊ शकतो.

गणित शिकण्याचे साधन

शालेय स्तरावर प्राथमिक अंकगणिती प्रक्रिया जशा की बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आदी शिकवण्यास टपाल तिकीटे यांची खरेदी कशी करता येईल याची उदाहरणे विविधपणे सहसा वापरली जाऊ शकतात. उदाहरणार्थ, बंद पाकीटासाठी पहिल्या २० ग्रॅ. वजनासाठी पोस्टाचा दर रू. ५ व त्या नंतरच्या प्रत्येक २० ग्रॅ. किंवा त्याहून कमी वजनासाठी रू. १.२५ असल्यास, ४५० ग्रॅ. वजनाच्या बंद पाकीटासाठी एकूण किती रूपयांची तिकीटे लागतील, असे प्रश्न निश्चितपणे गणिती प्रक्रियांचा सराव करण्यास उपयुक्त आहेत.

विशेष म्हणजे गणितातील विगमन (इंडक्शन) पद्धती व तिचे प्रकार या सारख्या महत्त्वाच्या कार्यपद्धती समजण्यास देखील टपाल तिकीटांचे गणित वापरणे शक्य आहे हे खाली दाखवले आहे :

उदाहरण : रू. ५ व त्याहून अधिक प्रत्येक पूर्णांक किंमतीचे टपाल केवळ रू. २ आणि रू. ३ या किंमतीच्या टपाल तिकीटांनी तयार करणे शक्य आहे.

उत्तर (विगमन पद्धतीने) : रू. ५ या किंमतीचे टपाल प्रत्येकी एक रू. २ आणि रू. ३ या किंमतीच्या तिकीटांनी तयार करणे शक्य आहे. आपण असे मानूया की पूर्णांक रू. (क) किंमतीचे टपाल रू. २ आणि रू. ३ या किंमतीच्या तिकीटांनी तयार करणे शक्य आहे. त्यात रू. २ किंमतीचे एक तिकीट वापरले असल्यास त्याला रू. ३ किंमतीच्या तिकीटाने बदली केल्यास रू. (क+१) किंमतीचे टपाल तयार होईल. मात्र रू. (क) किंमतीचे टपाल

केवळ रू. ३ च्या तिकीटांनी तयार झाले असू शकते. रू. (क) हे रू. ५ इतके किंवा त्याहून मोठे असल्यामुळे रू. ३ ची किमान दोन तिकीटे वापरणे अशा वेळी आवश्यक असेल. तर रू. ३ च्या दोन तिकीटांना रू. २ च्या तीन तिकीटांनी बदली करणे शक्य असेल, म्हणजे रू. (क+१) किंमतीचे टपाल तयार करता येईल. रू. ५, कुठली ही पूर्णांक किंमत रू. (क) आणि त्यावरून रू. (क+१) चे टपाल रू. २ आणि रू. ३ च्या तिकीटांनी तयार करणे हे अशा प्रकारे सिद्ध झाल्यामुळे विगमन तत्व असे सांगते की रू. ५ व त्याहून अधिक पूर्णांक किंमतीचे कुठले ही टपाल रू. २ आणि रू. ३ या टपाल तिकीटांच्या मदतीने तयार करणे शक्य आहे.

एकूण टपाल तिकीटे आणि संबंधित गणिताचे विविध पैलू यांचा अभ्यास खूप महत्त्वपूर्ण आणि मंनोरंजक आहे यात शंका नाही.

पूरक माहिती :

- टपाल तिकीटांप्रमाणेच गणिताशीसंबंधित चलनी नोटा, नाणी व छायाचित्रे गोळा करणे आणि त्याबाबत सविस्तर माहिती मिळवून आकर्षकपणे मांडणे असे प्रकल्प अनेक शैक्षणिक स्तरांवर हाती घेणे उपयोगी ठरू शकते.

⌘⌘⌘

२९

गणिती अटकळ

अनेकांना गणित हा विषय अभेद्य किल्यासारखा वाटतो ज्याची संरचना आणि निष्कर्ष तर्कसंगत असून परिपूर्ण आहेत. मोठ्या प्रमाणात या समजुतीत तथ्यही आहे, पण गणितातील काही निष्कर्ष संग्धिततापूर्ण आहेत हे नाकारता येणार नाही. त्यापैकी एका बाबीला गणिती अटकळ (कन्जक्चर) असे म्हटले जाते. गणिती अटकळ हे असे विधान असते ज्याची सिद्धता संपूर्णपणे झाली नसते, पण ते बरोबर असण्याची शक्यता दाखवणारा पुरावा मोठ्या प्रमाणात उपलब्ध असतो. गणितातील विविध शाखा आणि उपशाखांत अशा अनेक अटकळी वेळोवेळी मांडल्या गेल्या आहेत. त्यापैकी काही निवडक गणिती अटकळी आपण बघू या.

मूळ संख्या व अटकळी

१) गोल्डबॅकची अटकळ – सी. गोल्डबॅकने (१६९०–१७६४) सुप्रसिद्ध गणितज्ञ एल. ऑयलरला (१७०७–८३) एका पत्राद्वारे १७४२ मध्ये असे विचारले की २हून मोठी प्रत्येक सम संख्या, ही दोन मूळ संख्यांची बेरीज असते हे बरोबर आहे का? उदाहरणार्थ, ७६ = ४७ + २९.

गोल्डबॅकचा प्रश्न अटकळ या स्वरूपात आज देखील उपस्थित आहे, हे विशेष. त्याचा निष्कर्ष बरोबर आहे असे १२×१०^{१७} इतक्या संख्यापर्यंतच्या सम संख्येसाठी सिद्ध झाले आहे (अर्थातच संगणक वापरून), पण याचा अर्थ असा होत नाही, की त्यापेक्षा मोठ्या संख्येबाबतही तो बरोबर असेल! औपचारिक सिद्धता करेपर्यंत ते विधान अटकळच राहाणार.

२) गिलब्रेथची अटकळ – एन. एल. गिलब्रेथ (१९३६–) या अमेरिकन गणिती व जादूगाराने एक दिवशी हात रूमालावर काही प्रथम मूळ संख्या लिहिल्या. त्यानंतर त्यांने एका पोठोपाठ एक अशा त्या संख्यांची वजाबाकी करून चिन्ह न वापरता दुसरी ओळ तयार केली. तीच प्रक्रिया दुसऱ्या ओळीवर वापरून तिसरी ओळ आणि असेच पुढच्या ओळी तयार केल्या. त्याचे स्वरूप खाली दाखवले आहे :

२, ३, ५, ७, ११, १३, १७, १९, २३, ...
१, २, २, ४, २, ४, २, ४, ...
१, ०, २, २, २, २, २,........
१, २, ०, ०, ०, ०,......
१, २, ०, ०, ०,
१, २, ०, ०, ...
१, २, ...
१, ...

गिलब्रेथची अटकळ अशी आहे की पहिली ओळ सोडल्यास पुढील प्रत्येक ओळ १ ने सुरू होईल. या संदर्भात बरेच संशोधन झाले असले तरी निश्चित उत्तर सापडलेले नाही.

३) अँड्रीकाची अटकळ – डी. अँड्रीका (१९५६–   ) या रोमानियन गणितीने अशी अटकळ १९८५ मध्ये मांडली : $प_{न}$ आणि $प_{न+१}$ ह्या लागोपाठच्या मूळ संख्या असतील तर, $\sqrt{प_{न+१}} - \sqrt{प_{न}} < १$. उदाहरणार्थ $\sqrt{२९} - \sqrt{२३} = ०.५८९८१$.

दोन मूळ संख्यातील अंतर एखाद्या सूत्राने काढण्याचा प्रयत्न अनेक शतके चालू आहे. अँड्रीकाची अटकळ, जी आता १.३×१०^{१६} अंकापर्यंत खरी ठरली आहे, जर सिद्ध करता आली तर मूळ संख्येच्या अनेक प्रश्नांचे उत्तर मिळू शकते.

इतर अटकळी

वरील उदाहरणांवरून असा समज होऊ नये की गणिती अटकळी फक्त मूळ संख्यांशी संबंधित आहेत. १६११ सालची जे. केपलरची अटकळ

(१५७१–१६३०) जी बरोबर आहे असे १९९८ मध्ये टी. हेल्स याने सिद्ध केली, ती बंदिस्त अंतराळात वस्तू ठेवण्याच्या घनतेबद्दल आहे. तर एच. पाँयकर (१८५४–१९१२) याची अटकळ क्षेत्रविद्या (टोपोलोजी) या विषयातील होती जिची सिद्धता रशियन गणिती जी. पेरलमन (१९६६–) याने २००२–०३ मध्ये दाखवली. मात्र त्याने त्यासाठीचे पारितोषिक आणि २००६ चे फील्डस पदक घेण्यास नकार दिला (गणित फक्त गणितासाठी या तत्वानुसार). त्याचप्रमाणे एल. डब्ल्यू. विबर्वेक (१८८६–१९८२) याची १९१६ ची अटकळ बीजगणितीय फलाबाबत होती जी १९८४ साली अमेरिकन गणितज्ञ एल. डी. ब्रान्जेसने (१९३२–) सिद्ध केली.

निष्कर्ष

तथापि अनेक महत्त्वपूर्ण गणिती अटकळी आहेत त्यांची सिद्धता किंवा बरोबर नसणे गणितातील अनेक दालने उघडू शकतात. याबाबतीत संशोधनाला भरपूर वाव आहे. बरेच वेळा नवीन अटकळच संशोधनाला चालना देते, तरी गणिती अटकळी मांडून त्या पडताळणे असा अभ्यास सतत करणे उपयुक्त ठरेल.

⌘⌘⌘

३०

गणितातील विरोधाभास

तर्कशास्त्र (लॉजिक) व त्याची बैठक वापरणारे संपूर्ण गणितविज्ञान हे सहसा निर्दोष आणि आदर्शवत ज्ञान मानले जाते. मोठ्या प्रमाणात ते खरे देखील आहे, परन्तु या दोन्ही विषयांच्या चौकटीत विविध प्रकारचे विरोधाभास (पॅरडॉक्स) आढळतात हे विशेष. यातील काही विरोधाभासांमुळे मात्र गणित व संलग्न विषयांच्या विकासाला हातभार लागला आहे हे मान्य केले जाते. तरी या लेखात आपण गणिती विरोधाभासांची चर्चा करू या.

विरोधाभास निर्मिती

तत्वतः विरोधाभास हे एक विधान असते जे पुढे तार्किकदृष्ट्या स्वतःला छेद देणारे असे ठरते, किंवा मानवी अंतर्ज्ञानाच्या, अंतःप्रेरणेच्या विरुद्ध जाते. विरोधाभास हा प्रत्यक्षात सहसा पूर्वपक्षीय प्रमाणाने सुरू होतो, म्हणजे तर्कबुद्धीला पटणाऱ्या विधानाने त्याच्या आरंभ केला जातो; त्यापासून प्राप्त झालेला निष्कर्ष मात्र त्या विधानाला सुरुंग लावतो. या संदर्भात आपण एक प्राथमिक गणिती उदाहरणे खालील सहजपणे समजू शकणाऱ्या पायऱ्यांनी जाऊन बघू :

१) आपण गृहित धरू : $अ = ब$

२) $अ \times अ = अ^2 = अ \times ब$

३) $अ^2 - ब^2 = (अ \times ब) - ब^2$

४) $(अ + ब) \times (अ - ब) = ब \times (अ - ब)$

५) $अ + ब = ब$

६) $२ब = ब$

७) $२ = १$

अर्थातच हा विरोधाभास चौथ्या पायरीवरून पाचव्या पायरीवर जाताना केलेल्या एका गणिती प्रक्रियेमुळे निर्माण झाला आहे. आपण चौथ्या पायरीवरील समिकेला (अ – ब) ने भाग देऊन पाचवी पायरी गाठली आहे, पण आपण पायरी एक मध्ये अ = ब मानल्यामुळे अ – ब = ० असे आहे व शून्याने भागणे हे गणितात नियमबाह्य असल्यामुळे शेवटी विरोधाभास प्राप्त झालेला आहे.

प्रसिद्ध गणिती विरोधाभास

काही विरोधाभास हे भ्रामक (फॅलसि) अशा प्रकारचे असतात म्हणजे त्यातील युक्तिवाद चुकीचा असतो, जसे की धनसंपतीमुळे नेहमी सुख–समाधान मिळते. काही विरोधाभास मात्र सोडवणे शक्य नसते, उदाहरणार्थ १) हे वाक्य चूकीचे आहे, २) मी असत्य बोलत आहे, ३) सर्व मेरू द्वीपस्त खोटारडे असतात.

गणिताच्या इतिहासात विविध टप्प्यांवर वेगवेगळे विरोधाभास निर्माण झालेले आढळतात. त्यांची यादी बरीच मोठी आहे, तरी त्यातील निवडक महत्त्वपूर्ण विरोधाभास अंदाजित कालखंडानुसार खालील प्रमाणे आहेत. त्या प्रत्येकाबाबत प्रचूर प्रमाणात साहित्य उपलब्ध आहे :

- झेनोचा विरोधाभास (इ.स. पूर्व ४५०)
- ॲरिस्टॉटलचा चाकाचा विरोधाभास (इ.स. पूर्व ३४०)
- बुरिडानचा (गाढव संबधीचा) विरोधाभास (इ.स. १३४०)
- सेंट पीटर्सबर्ग विरोधाभास (इ.स. १७१३)
- नऊ खोल्यांचा विरोधाभास (इ.स. १८८९)
- रसेलचा विरोधाभास (इ.स. १९०१)
- बनाक–तार्स्की विरोधाभास (इ.स. १९२४)
- डोमकावळ्याचा (रेव्हन) विरोधाभास (१९४० चे दशक)
- ऑलिझचा विरोधाभास (इ.स. १९५१)
- ॲरोचा विरोधाभास (इ.स. १९५१)
- न्यूकॉम्बचा विरोधाभास (इ.स. १९६०)
- पॅरेन्डोचा विरोधाभास (१९९० चे दशक)

विरोधाभास परिणाम

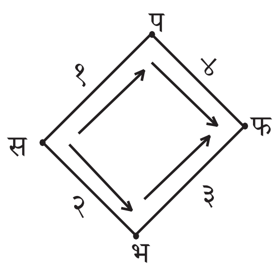
वरीलपैकी काही विरोधाभास केवळ तर्कशास्त्र किंवा अमूर्त गणिताशी संबंधित आहेत, तर काही व्यावहारिक बाबींसाठी उपयुक्त आहेत. असाच एक मार्गदर्शन करणारा विरोधाभास १९६९ मध्ये डी. ब्रेस्स या जर्मन गणितज्ञाने एका जर्नलमध्ये प्रसिद्ध केला होता जो वाहतूकीच्या रस्ते जालकासंबंधी होता (मूळ लेख जर्मन भाषेत आहे). हा ब्रेस्सचा विरोधाभास या नावाने ओळखला जाणारा विरोधाभास खालील प्रमाणे मांडता येईल :

दिलेल्या रस्ता जालकातील कुठल्याही स्थानापासून सुरू होऊन कुठल्याही इच्छित स्थानावर पोचणाऱ्या मोटरगाड्यांची संख्या माहित आहे. तसेच कुठला रस्ता निवडायचा हे रस्त्याची प्रत्यक्ष स्थिती व रहदारी याचा अंदाज घेऊन मोटारचालक ठरवू शकतो. प्रत्येक चालक त्याला इष्टतम असा मार्ग पसंत करेल (उदा. सर्वात कमी वेळ घेणारा). अशा जालकात नवीन रस्ता जोडला व मोटारचालकांना तो उपलब्ध करून दिला असे केल्यास, एकूण सर्व चालकांना त्या प्रवासासाठी लागणारा वेळ मूळ जालकात एकूण सर्व चालकांना लागणाऱ्या वेळापेक्षा अधिक असू शकतो. म्हणजेच नवीन रस्त्यांनी एकूण बचत होईल असे घडेल ही अपेक्षा फोल ठरू शकते.

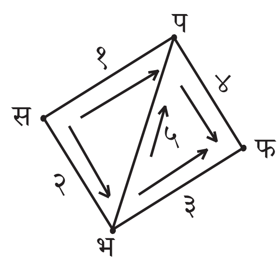
हा विरोधाभास आपण एका साध्या उदाहरणावरून तपासुया. आपल्याकडे चार रस्ते असलेले आकृती १ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे जालक आहे. प्रत्येक रस्त्यावरून प्रवासासाठी लागणारा वेळ खालील फलनियमाप्रमाणे आहे असे मानुया :

सप : ट (१) = ५० + $व_{१}$ सभ : ट (२) = १० × $व_{२}$

भफ : ट (३) = ५० + $व_{३}$ पफ : ट (४) = १० × $व_{४}$



आकृती १



आकृती २

इथे $व_{१}$, ..., $व_{४}$ हे प्रत्येक रस्त्यावरील मोटारींची संख्या दाखवते. समजा सहा मोटारचालक बिंदू स पासून बिंदू फ पर्यन्त जाणार आहेत. समजा त्यातील तीन चालक सपफ असा मार्ग निवडतील तर उर्वरित तीन चालक सभफ असा मार्ग निवडतील. त्याप्रमाणे वरील सूत्रानुसार प्रत्येक मार्गावरील वेळ असा असेल :

ट(१) = ५३, ट(२) = ३०, ट(३) = ५३ आणि ट(४) = ३०. तरी प्रत्येक चालकाला लागणारा वेळ ८३ असा सारखाच असून समतोलाची स्थिती असेल. एकूण सहा चालकाचा वेळ ८३ × ६ = ४९८ असेल.

समजा या जालकात आकृती २ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे भप असा एक नवीन पाचवा रस्ता जोडला ज्यावर प्रवासाचा वेळ ट(५) = १० + $व_{५}$ असा

असेल, जिथे $व_५$ भप मार्गावरील मोटारींची संख्या दाखवले. नवीन रस्ता उघडल्यावर सपफ मार्ग घेणाऱ्या एका चालकाच्या लक्षात येईल की त्याने सभपफ मार्ग घेतल्यास त्याचा वेळ ८१ (सभ = ४०, भप = ११, पफ = ३०) असा असेल व तो पूर्वीच्या ८३ पेक्षा कमी होईल. त्याच प्रमाणे सभफ मार्ग घेणारा विचार करून वागू शकेल. म्हणजे सपफ आणि सभफ मार्ग वापरणाऱ्या चालकांपैकी प्रत्येकी एक चालक सभपफ असा मार्ग घेतील. तरी प्रत्येक रस्त्यावरील नवीन वेळ असा असेल :

सप : ट(१) = ५० + २ = ५२ सभ : ट(२) = १० × ४ = ४०

भफ : ट(३) = ५० × २ = ५२ पफ : ट(४) = १० × ४ = ४०

भप : ट(५) = १० + २ = १२

या प्रमाणे सपफ, सभफ आणि सभपफ या मार्गावरील प्रत्येक चालकाचा वेळ ९२ असा होऊन नवीन समतोल साधला जाईल. पण प्रत्येक चालकाचा वेळ पूर्वीच्या ८३ पेक्षा ९ ने वाढला असेल. एकूण सहा चालकांचा आता ९२ × ६ = ५५२ असा वेळ झालेला दिसेल. याचा अर्थ चालकाने आपला स्वतःचा वेळ नवीन रस्ता वापरून वाचवण्याचा प्रयत्न सर्वांनाच अधिक वेळ खर्च करणारा असा आहे.

विरोधाभासांचे अभ्यास व व्यवस्थापन

गणिती फलनियम काही विशिष्ट पद्धतीनी वापरल्यामुळे हा विरोधाभास निर्माण झाला असे वाटू शकते, पण प्रत्यक्षात पायाभूत सुविधा निर्माण करताना किंवा त्यांचा विस्तार करताना अशा विरोधाभासाची शक्यता लक्षात घेतली पाहिजे. या संदर्भात अनेक वेळा काही रस्ते एक-दिशा मार्ग असे ठेवणे अधिक सोयिस्कर ठरते असा अनुभव आहे.

विरोधाभासाच्या अभ्यासाला पुष्टी किंवा बळकटी सिद्धांत (कॉन्फर्मेशन थेयरी) असे म्हटले जाते व विज्ञानात सत्य शोधण्यासाठी त्याचा वापर केला जातो. अर्थातच अशी पुष्टी विज्ञानाला क्रमाक्रमाने विकसित होण्यास मदत करते. मुख्य बाब म्हणजे गणिती विरोधाभासांचा अभ्यास कोडी किंवा मंनोरंजन यांच्या पलीकडे जाऊन अनेक उपयुक्त गोष्टींसाठी मार्गदर्शक ठरला आहे. तरी या प्रकारचे प्रकल्प व त्यांचे उपयोजन करण्यास प्रोत्साहन देणे उपयुक्त ठरेल.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

⌘⌘⌘

३१

गणिती प्रतिकृती

तर्कशास्त्र पद्धतीने इच्छित गणिती प्रक्रियेला मांडणे, प्राप्त निष्कर्ष तर्कसंगत तसेच कुठल्याही गणिती मूलभूत संकल्पनांना छेद देत नाही हे बघणे, पद्धती सुलभ करत राहाणे अशी गणिताची काही शक्तीस्थळे आहेत. त्यातील एक महत्त्वाचे म्हणजे गणिती प्रतिकृतीची निर्मिती करणे (मॉडेलिंग) असे होय. गणिताच्या आंतरिक उपयोगासाठी आणि प्रत्यक्षात उपयोजनेसाठी गणिती प्रतिकृती तयार करणे सहसा अनिवार्य ठरते. विशेष म्हणजे असे विभिन्न प्रकारे गणिताच्या आरंभापासून होत आलेले आहे. उदाहरणार्थ, बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार अशा प्राथमिक गणिती प्रक्रिया शिकवण्यासाठी आणि त्यांचा सराव करण्यासाठी दैनंदिन आयुष्यातील अनेक घडामोडींना गणिती रुपात म्हणजेच साध्या प्रतिकृतीत मांडण्याची पद्धत प्राचीन गणित साहित्यात विपुलतेने आढळते. जसे की भास्कराचार्यांच्या *लीलावती* या ग्रंथात अनेक श्लोक या प्रकारचे आहेत.

प्रतिकृतीची क्षमता

भौतिकविज्ञान आणि काही प्रमाणात खगोलविज्ञानातील प्रश्नांना गणिती प्रतिकृतीत मांडून सोडवणे हे फार पूर्वीपासून केले जात आहे, ती परंपरा मध्य–कालीन युगात, आधुनिक युगात ते आजपर्यंत चालू आहे. मात्र गणिती प्रतिकृती व एकूण विज्ञान निर्मितीमध्ये एक फरक प्रकर्षाने पडला आहे. ॲरिस्टॉटलने माहित नसलेल्या गोष्टींना माहित असलेल्या गोष्टीत मांडून प्रतिकृती तयार करण्यावर भर दिला. तर न्यूटनने माहित असलेल्या गोष्टींना

अमूर्त स्वरुपात मांडून माहित नसलेल्या घटनांचा व घटकांचा शोध घेणे असा फार मोठा फरक त्या पूर्वापार पद्धतीत केला. आणि या लक्षणीय बदलामुळे गणिती प्रतिकृतीद्वारे प्रश्न कुठल्याही शास्त्रातील असो, क्षेत्रातील असो, तो सोडवण्यास मदत होऊ लागली. आता असा कुठलाही विषय त्यामुळे नाही ज्यासंदर्भात गणिती प्रतिकृती वापरलेल्या नाहीत. सर्व ज्ञानशाखांत गणिती प्रतिकृतीचा उपयोग सखोल संशोधनासाठी करणे हे आता मान्य झाले आहे, काही प्रमाणात अनिवार्यदेखील झालेले आढळते.

निर्मिती पद्धत

प्रत्यक्षात गणिती प्रतिकृती तयार करणे व वापरणे हे खालील प्रमाणे केले जाते :-

१) प्रश्नाचे उद्देश व्यवस्थितपणे मांडणे.

२) त्या प्रश्नाशी संबंधित सर्व घटक जसे की परिवर्तिके (व्हेरिएबल्स) यांची यादी करून त्यांना अमूर्त संज्ञानी दर्शवणे.

३) काही गृहीतके वापरून कळीची परिवर्तिके ठरवणे, आणि त्यांचे आपसातले संबंध गणिती सूत्रांनी व्यक्त करणे, म्हणजेच प्राथमिक प्रतिकृती तयार करणे.

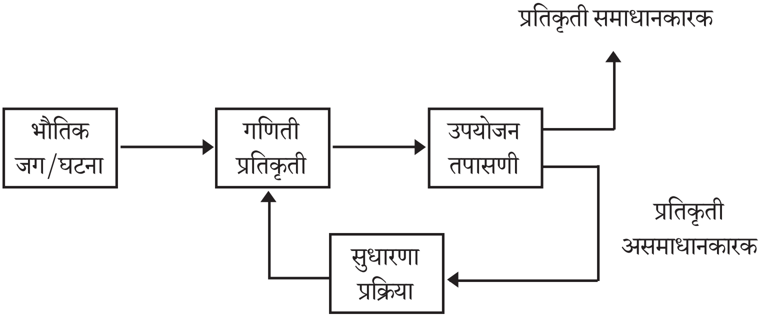
४) मूळ उद्देश लक्षात घेऊन आवश्यक त्या गणिती प्रक्रिया वरील गणिती सूत्रांवर करणे.

५) प्राप्त उत्तराचा उद्देशानुरूप अर्थ लावणे, आणि तो उपयुक्त आहे किंवा कितपत मान्य करता येईल हे तपासणे.

६) गृहीतके थोडी शिथील करणे किंवा आणि अतिरिक्त परिवर्तिके आणि घटक यांचा समावेश करून गणिती प्रतिकृती अधिक व्यापक करणे.

७) सदर सुधारित गणिती प्रतिकृती सोडवून उत्तर काढणे आणि प्रतिकृती परत अधिक व्यापक करणे, या प्रकारे समाधान होईपर्यंत ही प्रक्रिया वारंवार करणे असे अपेक्षित असते.

वरील एकूण पद्धतीला आकृती १ मध्ये मांडले आहे.



आकृती १

व्यावहारिक बाबी

गणिती प्रतिकृती ही अर्थातच प्रश्नाच्या स्वरूपाप्रमाणे बदलते, पण बहुतांशपणे वरील पायऱ्यांचाच उपयोग केला जातो. मुख्य म्हणजे प्रथम प्रतिकृती सुटसुटीत असावी व सोडवण्यास सुलभ जावी यावर भर दिला जातो. त्यासाठी काहीशी कृत्रिम वाटणारी गृहीतके मानली जातात. उदाहरणार्थ, भौतिक किंवा खगोल विज्ञानाच्या गणिती प्रतिकृतीमध्ये पृथ्वी ही एक आदर्श गोळा आहे असे प्रथम मानले जाते व नंतरच्या सुधारणेत ती ध्रुवप्रदेशाच्या भागांत थोडी चपटी आहे असा बदल केला जातो. सरळरेषीय प्रायोजन (लिनिअर प्रोग्रामिंग) प्रतिकृतीत दिलेल्या संसाधनात कमाल नफा मिळवणे हे उद्देश साध्य करण्यासाठी प्रथम मिळालेले उत्तर जसे की, बाके आणि खुर्च्या या धन अपूर्णांकात मिळाल्या (उदा. १५.४३, २७.३९) तरी चालतील असे मानले जाते. त्यानंतरच्या सुधारणेत बाके व खुर्च्या दाखवणारी परिवर्तिके धन पूर्णांक असली पाहिजेत असे बंधन घालण्यात येते, त्याला पूर्णांक सरळरेषीय प्रायोजन (इंटिजर लिनिअर प्रोग्रामिंग) म्हणतात. तशी सुधारित प्रतिकृती सोडवण्याचे गणित अधिक गुंतागुंतीचे आहे, म्हणून सोप्या गणिती प्रतिकृतीने सुरुवात करणे व्यावहारिक ठरते.

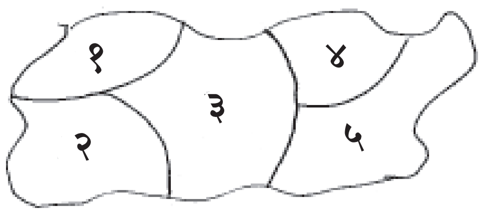
अनेकदा गणिती प्रतिकृती किती प्रमाणात स्थिर आहे याचा अभ्यासपण उपयुक्त ठरतो. याचा अर्थ असा की गणिती प्रक्रिया करून काढलेले उत्तर, प्रतिकृती मधील घटकांत (उदा. काही गुणांकांच्या मूल्यात) कितपत बदल होईपर्यंत लागू राहाते, हे तपासणे. यामुळे प्रत्यक्ष उपयोजनांमध्ये अनेक फायदे मिळतात.

गणिती प्रतिकृतीची निर्मिती त्यातील घटक किंवा परिवर्तिकांमधील परस्पर संबंध इतर कुठल्याही विषयातील संकल्पानांचे साम्य लक्षात घेऊन केली जाऊ शकते हे विशेष. या संदर्भात आपण एक उदाहरण बघुया.

नागरी प्रवासी परिवहन व्यवस्था प्रतिकृती

आपल्याला एका नगरामध्ये प्रवासी परिवहन व्यवस्थेत सुधार करणे असे उद्देश दिले आहे. तरी त्यासाठी आपण एक प्राथमिक गणिती प्रतिकृती तयार करूया.

सर्व प्रथम आपणास त्या नगरात किती संख्येत व कुठून ते कुठे लोकांचा प्रवास घडतो हे बघावे लागेल. त्यानंतर तेवढ्या प्रमाणात प्रवासी फेऱ्यांची ने-आण करण्यासाठी सध्याची प्रवासी व्यवस्था कुठे कमी पडते हे शोधणे आणि नंतर सुधारणेचे उपाय सुचवणे असे करावे लागेल.



आकृती २

यासाठी नगराचा ढोबळ अभ्यास करून त्याला समुचित विभागांमध्ये नकाशावर विभागले जाते. उदाहरणार्थ, आकृती २ मध्ये नगराचे पाच विभाग केले आहेत. प्रत्येक विभाग $प_१$, $प_२$, $प_३$, $प_४$ आणि $प_५$ इतक्या एकूण प्रवासी फेऱ्या क्रमशः *निर्माण करतो* असे मानूया. या संख्यांचे अनुमान प्रत्येक विभागातील लोकसंख्या व इतर काही घटक लक्षात घेऊन संख्याशास्त्राच्या पद्धती वापरून काढणे शक्य असते. तरी एकूण निर्माण होणाऱ्या प्रवासी फेऱ्या : $प = प_१ + प_२ + प_३ + प_४ + प_५$.

त्यानंतर प्रत्येक विभाग $फ_१$, $फ_२$, $फ_३$, $फ_४$ आणि $फ_५$ इतक्या एकूण प्रवासी फेऱ्या क्रमशः *आकर्षित करतो* असे मानूया. या संख्याचे अनुमान प्रत्येक विभागात असलेले रोजगारीचे उद्योग, कार्यालये, शाळा, रुग्णालये,

बाजार असे घटक लक्षात घेऊन व संख्याशास्त्राचा वापर करून काढले जाते. तरी एकूण आकर्षित होणाऱ्या प्रवासी फेऱ्या : $फ = फ_{१} + फ_{२} + फ_{३} + फ_{४} + फ_{५}$.

आता कळीचा प्रश्न असा येतो की या आंतरविभागीय प्रवासी फेऱ्यांचे वितरण कसे करायचे. आणि इथे भौतिक विज्ञानातील *गुरुत्वाकर्षण नियमाचा* वापर समरूप म्हणून केला जातो (दोन वस्तुतील आकर्षणाचे बल वस्तुमानाच्या गुणाकाराच्या समप्रमाणात व त्यांच्यातील अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्त प्रमाणात बदलते). तरी, $ट_{कख}$ हे परिवर्तक क विभागात निर्माण होणारी प्रवासी फेरी ख विभागात आकर्षित होते असे दाखवते असे मानल्यास (क = १,२,३,४,५ आणि ख = १,२,३,४,५) आणि $ड_{कख}$ हे क आणि ख विभागातील अंतर मानल्यास, आपण गुरुत्वाकर्षण नियमाप्रमाणे खालील आंतरविभागीय प्रवासी संख्या प्राप्त करण्याचे प्राथमिक सूत्र मांडू :

$ट_{कख} = ल_{क} \times प_{क} \times व_{ख} \times फ_{ख} /(ड_{कख})^{२}$, क = १,२, ...,५, ख = १,२,...,५. इथे $ल_{क}$ आणि $व_{ख}$ हे अचल घटक असतात, जे प्रत्येक विभागासाठी अनुमानित करता येतात. अर्थातच, एकूण प्रवासी फेऱ्यांची संख्या $ट_{कख}$ ही एकूण प आणि फ यापेक्षा अधिक असणार नाही अशी गणिती मर्यादा लक्षात घेतली जाते.

एकूण प्रवासी फेऱ्यांना वरप्रमाणे विभागवार वितरित केल्यानंतर, त्या विभागांना जोडणारे रस्ते व रेल्वे (असल्यास) यांची सध्या असलेल्या जालकांची प्रवासी ने-आण क्षमता व त्यावर वरीलप्रमाणे निर्माण होणारा ताण, यातील तफावत मोजली जाते. त्यानुसार परिवहन व्यवस्थेत कुठे व कसा सुधार करावा हा निर्णय घेण्यास ढोबळ मार्गदर्शन मिळते.

विस्तार

ही प्राथमिक गणिती प्रतिकृती त्यानंतर अनेक प्रकारे सुधारित केली जाऊ शकते. उदाहरणार्थ, गुरुत्वाकर्षण नियमाधारित सूत्रात बदल करणे (उदा. अंतराऐवजी प्रवास वेळ, भाडे किंवा सर्व समावेशक प्रवासी खर्च), माहिती सिद्धांत तसेच गेम थेयरीतील काही संकल्पनांचा वापर करून प्रारूपात बदल करणे, विभागांची संख्या वाढवणे इत्यादी. सुधारित परिवहन व्यवस्थेमुळे भू-

वापरात बहुधा फरक पडतो. तरी त्याचा परिणाम लक्षात घेऊन प्रतिकृतीत पुढच्या फेरीत बदल करणे योग्य ठरते. अशा गतिमान चक्रीय प्रतिकृती पद्धतीला 'एकात्मक भूवापर–परिवहन नियोजन प्रतिकृती' निर्माण करणे असे म्हणतात. वरील प्राथमिक प्रतिकृतीत मोठ्या प्रमाणात फेर बदल मागील ५० वर्षातील प्रत्यक्ष वापरांच्या अनुभवावरून करण्यात आले आहेत, सतत केले जात आहेत. संगणकामुळे असे गणिती अभ्यास महाकाय महानगरांसाठी हाती घेणे सुलभ झाले आहे. उल्लेखनीय बाब म्हणजे मुंबईसह भारतातील अनेक मोठ्या व मध्यम आकाराच्या नगरांच्या भूवापर व परिवहन व्यवस्थेचे एकात्मक नियोजन सदर प्रकारच्या प्रगत गणिती प्रतिकृतीनी केले जात आहे.

वरील उदाहरणावरून गणिती प्रतिकृतींची परिस्थितीचे योग्य वर्णन करणे, भविष्याचा वेध घेणे आणि इष्टतम निर्णय घेण्यास मदत करणे अशी महत्त्वपूर्ण उपयोगिता स्पष्ट होते. तसेच सुरुवात प्राथमिक प्रतिकृतीने करून तिची गहनता वाढवत जाणे असे धोरण समुचित ठरते हे देखील लक्षात येते. गणिती आलेख किंवा साधी समीकरणे, विषमिका (इनइक्वॉलिटी) मांडणे हा देखील गणिती प्रतिकृती निर्मितीचा पहिला टप्पा असू शकतो. गणिती प्रतिकृती तयार करणे काही प्रमाणात कला देखील असते. तरी संशोधकांनी, शिक्षकांनी आणि विद्यार्थ्यांनी विविध प्रकारच्या घटनांसाठी अधिकाधिक गणिती प्रतिकृती विकसित करण्याचा सराव व अभ्यास नियमितपणे करण्यावर भर देणे योग्य ठरेल.

⌘⌘⌘

३२

गतिमान प्रायोजन

मर्यादित संसाधनांचा वापर करून दिलेले उद्देश इष्टतमपणे कसे साध्य करायचे अशा प्रश्नांना सोडवण्यासाठी सरळरेषीय प्रायोजन (लिनिअर प्रोग्रामिंग) या गणिती शाखेचा विकास दुसऱ्या महायुद्धाच्या अंतिम टप्प्यात अमेरिकन वायूसेनेच्या काही समस्या सोडवण्यासाठी करण्यात आला. १९४७ नंतर ती पद्धत नागरिक वापरासाठी जाहिर करण्यात आली व आपरेशनल रिसर्च या गणितविज्ञानाचा गाभा बनली. असरळरेषीय (नॉन-लिनिअर) प्रायोजन आणि अनेकविध पद्धतीने त्याचा विकास व वापर झालेला आहे, आणि आजही होत आहे.


रिचर्ड बेलमन (१९२०-१९८४)

१९५० च्या दशकात अमेरिकन वायूसेनेने आणखीन गुंतागुंतीचे व्यवस्थापनाचे प्रश्न सोडवण्याचे *रँड* (रिसर्च अँड डेव्हलपमेण्ट) या एका अग्रगण्य संशोधनसंस्थेला सांगितले. त्या संस्थेने त्यासाठी रिचर्ड बेलमन (१९२०-१९८४) या गणितज्ञास पाचारण केले. ते प्रश्न बहु-अवस्था निर्णय घेणे (मल्टी-स्टेज डिसिजन-मेकिंग) या प्रकारात मोडणारे असे होते, त्यांना गणिती प्रतिकृतीत मांडून सोडवणे हे एक मोठे आव्हान होते. बेलमन यांनी अशा प्रश्नांना हाताळण्यासाठी एक तत्व मांडले व त्याच्या आधारे एक सुलभ पद्धत विकसित केली, जी आपण एका उदाहरणाने इथे बघू.

पद्धतीचे नामकरण

या पद्धतीला नाव काय द्यावे याबाबत बेलमन यांनी असे नमूद केले आहे की नावात 'गणित' आणि 'संशोधन' असे शब्द असू नयेत असा सल्ला त्यांना देण्यात आला, कारण अमेरिकेच्या तत्कालीन संरक्षणमंत्र्यांना हे दोन्ही शब्द अगदी नापसंत होते! तरी ही पद्धत गतिमान पद्धतीने इष्टतम उत्तराकडे सरकत जाणारी आहे हे दर्शवणारे *गतिमान प्रायोजन (डायनेमिक प्रोग्रामिंग)* असे नाव त्यांनी दिले व ते मान्य झाले. याच शीर्षकाचे त्यांचे एक पुस्तक १९५७ साली प्रसिद्ध झाले व ते या पद्धतीच्या अभ्यासासाठी मूलभूत आहे. अर्थातच या पद्धतीचा अनेक प्रकारे विस्तार व उपयोग गेल्या सहा दशकांत झाला आहे.

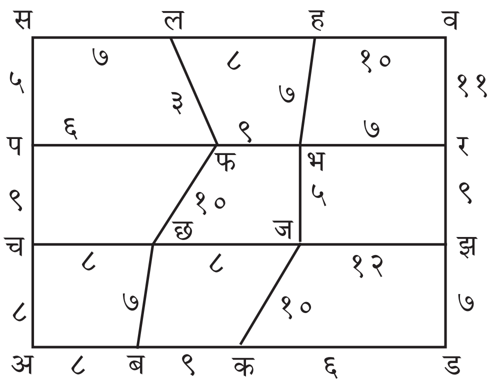
पद्धतीचा गाभा

बेलमन यांनी बहु-अवस्था प्रश्नाला, एका-वेळी-एक अवस्था सोडवणे, या प्रकारे सोडवत जाणे व प्राप्त उत्तरांची तुलना करून पुढची अवस्था तपासणे असा दृष्टिकोन स्वीकारला. या संदर्भात त्यांनी पुढील 'इष्टतमतेचे तत्व' (ऑप्टीमॅलिटी प्रिन्सिपल) मांडले : ''कुठल्याही अवस्थेपासून अंतिम अवस्थेपर्यंत जाण्याचा इष्टतम मार्ग समजल्यावर तो वापरायचा आणि त्या मूळ अवस्थेपर्यंत कसे पोचले होते हे विचारता घ्यायचे नाही.'' सदर नियमाचा वापर करण्यासाठी अंतिम अवस्थेत त्याच्या आधीच्या अवस्थांपासून पोहोचण्यसाठी इष्टतम मार्ग शोधायचा व त्याचप्रमाणे मागे-मागे जात सुरुवातीच्या अवस्थेपर्यंत जायचे, अशी पद्धत बेलमनने वापरली. ही विचारसरणी त्यावेळी उपलब्ध असलेल्या सरळरेषीय प्रायोजनाच्या विचारसरणी आणि पद्धतीच्या अगदी विपरीत होती व त्यामुळे वैशिष्टपूर्ण होती. कुठली ही गुंतागुंतीची गणिती प्रतिकृती निर्मिती व पद्धत न वापरता मोठ्या आकाराचे प्रश्न सोडवण्यास उपयुक्त असे हे गतिमान प्रायोजन ऑपरेशनल रिसर्चचा अविभाज्य भाग आहे व मोठ्या प्रमाणात वापरले जाते.

इष्टतम मार्ग शोधणे

उदाहरण : स्थान 'अ' पासून स्थान 'व' पर्यन्त जाण्यासाठी उपलब्ध असे रस्त्यांचे जाळे आकृती १ मध्ये दाखवले आहे. त्यामध्ये अनेक ठिकाणी दोन किंवा अधिक रस्ते मिळून नाके निर्माण झालेले दिसते. दोन नाक्यांना

जोडणाऱ्या प्रत्येक रस्त्याचे अंतर पूर्ण करण्यास वाहानाला लागणारा सरासरी वेळ (मिनिटांमध्ये) हा त्या रस्त्याला लागून आकृती १ मध्ये दाखवला आहे. हा वेळ रस्त्याची लांबी तसेच पृष्ठभागाची स्थिती आणि त्या रस्त्यावरील वाहनांची गर्दी असे घटक लक्षात घेतल्यामुळे वेगवेगळा आहे. तरी 'अ' पासून 'व' पर्यंत जाण्यास रस्त्यांचा क्रम कसा निवडल्यास आपल्या वाहनास कमीत कमी वेळ लागेल हा निर्णय घ्यायचा आहे.



आकृती १

आकृती १ वरून स्पष्ट आहे की अनेकविध प्रकारे असे मार्गक्रम उपलब्ध असून प्रत्येकाचा एकूण वेळ मोजून त्यातील किमान वेळ असलेला मार्ग निश्चित करावा लागेल. अशी धोपटमार्गी पद्धत अर्थातच जाळे आणखीन मोठे व गुंतागुंतीचे असल्यास व्यावहारिक ठरणार नाही. प्रत्येक नाक्यावरून इच्छित स्थळाच्या दुसऱ्या नाक्यावर जाणे अशी एक अवस्था मानली, तर आपण बहु-अवस्था निर्णय घेणे या प्रकारच्या प्रश्नाला हाताळत आहोत हे लक्षात येते. तरी बेलमनचे गतिमान प्रयोजन वापरून अशा प्रकारचे प्रश्न सोडवणे इष्ट ठरेल.

वर नमूद केल्याप्रमाणे आपण अंतिम अवस्था म्हणजे 'व'ला पोहोचण्यासाठी त्याच्या लगतच्या/मागच्या उपलब्ध अवस्थांचा विचार करू. ह्यासाठी आकृती १ प्रमाणे ह ते व आणि र ते व असे दोन मार्ग असून ते क्रमश: १० आणि ११ मिनिटे असा प्रवास वेळ घेतात. तरी ह ते व मार्ग इष्ट आहे.

आता आपण भ नाक्यावर असताना व कडे जाण्याचा इष्टतम मार्ग कोणता असेल ते बघू या. भ ते ह हा मार्ग आणि ह ते व मार्ग वापरल्यास ७ + १० = १७ मिनिटे वेळ लागेल. तर भ ते र आणि र ते व मार्ग घेतल्यास ७ + ११ = १८ मिनिटे वेळ लागेल. म्हणजेच भ ते ह आणि ह ते व मार्ग घेणे उचित ठरेल.

ल ते व वापरल्यास ८ + १० = १८ मिनिटे आणि झ ते व वापरल्यास ९ + ११ = २० मिनिटे लागतील हे स्पष्ट आहे. फ ते ल ते ह ते व असा मार्ग घेतल्यास ३ + ८ + १० = २१ मिनिटे लागतील. दुसरा पर्याय म्हणजे फ ते भ ते ह ते व = ९ + ७ + १० = २६ मिनिटे असा आहे. तिसरा पर्याय फ ते भ ते र ते व विचारात घेण्याची गरज नाही, कारण र ते व इष्ट मार्ग नसल्याचे आपण वर बघितलेले आहे.

याच पद्धतीने आकडेमोड केल्यावर ज ते भ ते ह ते व हा ५ + ७ + १० = २२ मिनिटे घेणारा मार्ग ज पासून इष्ट दिसतो. मागे जात उर्वरित सर्व नाक्यापासून 'व' पर्यंत जाण्याचे वेळेप्रमाणे इष्टतम मार्ग शोधणे सहज शक्य आहे, हे आता स्पष्ट झाले असेल. तरी शेवटी इष्टतम मार्ग अ ते च ते प ते फ ते ल ते ह ते व आहे, जो ८+९+६+३+८+१० = ४४ मिनिटे असा किमान वेळ घेणारा आहे.

वरील उदाहरणावरून लक्षात येते की एका अवस्थेपासून इष्टतम मार्ग समजला की त्याचा उपयोग पुढच्या आकडेमोडीत करता येत असल्यामुळे अनेक मार्ग त्या अवस्थेत संभाव्य असले, तरी त्या सगळ्यांचा विचार करणे आवश्यक नसते. म्हणजेच आकडेमोड करण्यात बचत होते. अर्थातच प्रश्न आकाराने मोठा, म्हणजे शेकडो अवस्था दर्शवणारा असल्यास ही बचत लक्षणीय प्रमाणात जाणवते. त्यामुळे अशक्यप्राय वाटणाऱ्या बहु-अवस्था समस्या सोडवणे शक्य होते. प्रत्यक्षात संगणकाचा वापर या गतिमान प्रयोजन पद्धतीला कार्यान्वित करण्यात सहजपणे करता येतो.

उपयोजनांच्या कक्षा

विमान कंपन्यांना किमान वेळ किंवा किमान इंधन खर्च होणारे सेवा मार्ग ठरवणे, गोदामातील मालाचा साठा इष्टतम राखणे, टेलिफोन सेवांचा विस्तार करणे, कारखाने स्वयंचालित करणे अशा निर्णय घेण्याच्या अतिशय गुंतागुंतीच्या उपयोजनांत सदर गतिमान प्रायोजन पद्धतीचा व्यापक उपयोग

केला जातो. या संदर्भात बरेच साहित्य उपलब्ध आहे जे गतिमान प्रायोजनाची उपयुक्तता विविध क्षेत्रात दाखवते.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

पूरक माहिती :

- नवीन गणिती पद्धतीला नाव देणे काही वेळा अवघड ठरू शकते. उदाहरणार्थ, अतिशय जटील असरळरेषीय प्रायोजन प्रश्नासाठी गणितज्ञ आर. जे. डफीन (१९०९-१९९६) ने १९६० च्या दशकात एक प्रभावी पद्धत विकसित केली व तिला भूमितिक प्रायोजन (जॉमेट्रिक प्रोग्रामिंग) असे नाव दिले. या पद्धतीत भूमिती तर दिसत नाही अशा प्रतिक्रियेला उत्तर देताना त्यांनी थट्टेत म्हटले की मूल जन्मल्यावर त्याला नाव देणे भाग असतेच ! तांत्रिकदृष्ट्या कुठल्याही सांत संख्याची अंकीय सरासरी (मध्यमान) त्यांच्या भूमितिक सरासरी (मध्यमान) पेक्षा अधिक असते या मूलभूत तत्वाचा उपयोग या पद्धतीसाठी केल्यामुळे ते नाव देण्यात आले होते व ते सर्वमान्य झालेले आहे.

⌘⌘⌘

३३

कार्यक्रम सादरीकरणाचे गणित

नृत्य, नाट्यछटा, समूहगीत असे मंनोरंजनाचे विविध घटक एकत्र करून सांस्कृतिक कार्यक्रम सादर करणे हे हौशी तसेच व्यावयायिक पद्धतीने सर्व जगभर केले जाते. अशा कार्यक्रमांना रंगमंचावरील सजावट प्रत्येक घटकासाठी सहसा बदलावी ही लागत नाही. त्यामुळे दोन खेळ घटक दरम्यान फार वेळ काढण्याची गरज नसते. असा दोन ते अडीच तास वेगवेगळ्या रंगभूषेतील विभिन्न कलाकरांनी सततपणे सादर केलेला छोटे छोटे पण रंगतदार घटकांनी गुंफलेला एकूण कार्यक्रम बहुधा लोकप्रिय होतो. मात्र कार्यक्रम संयोजक किंवा व्यवस्थापकाला घटकांचा एक व्यवस्थित क्रम लावून कमीत कमी वेळ रंगमंच रिकामा ठेवणे अर्थात निवेदकाला कमी वेळ काढायला लावणे, असे सांभाळावे लागते. हे दिसते तितके सोपे नसते, कारण फक्त १० घटक असलेला कार्यक्रम १०! = १० × ९ × ८ × ७ × ६ × ५ × ४ × ३ × २ × १ = ३६,२८,८०० इतक्या प्रकारे सादर करणे तत्वतः शक्य आहे. त्याच बरोबर प्रत्येक घटकासाठी लागणारा रंगभूषा प्रसाधनाचा वेळ आणि त्याचा सादरीकरणाचा वेळ वेगवेगळा असतो. गणित व्यवस्थापकाला मदत करू शकेल का ?

त्याचे उत्तर होय असे आहे. कसे ते आपण एक उदाहरण घेऊन बघुया.

प्रायोगिक उदाहरण

आपण एकूण कार्यक्रमात अ, ब, क, ड, प, फ, म आणि भ असे आठ खेळ घटक आहेत असे मानुया. प्रत्येक खेळ घटकासाठी रंगभूषा प्रसाधनासाठीचा आणि त्याच्या प्रत्यक्ष सादरीकरणाचा वेळ मिनिटांमध्ये तक्ता १ मध्ये दिला आहे. कुठला ही खेळ घटक कुठल्या ही क्रमाने करता येईल, तसेच प्रसाधन–खोली सुविधा कार्यक्रम

सुरू करतानाच उपलब्ध होईल असे मानुया आणि एका वेळी एकाच खेळाच्या कलाकरांचे प्रसाधन किंवा सजण्याची व्यवस्था होईल असे गृहीत धरुया.

तक्ता १

खेळ घटक	रंगभूषा (मिनिटे)	सादरीकरण (मिनिटे)
अ	२०	२५
ब	१२	१०
क	१४	१२
ड	१३	११
प	९	१३
फ	१८	१५
म	२५	२१
भ	१६	२३

तक्ता १ असे दाखवतो की प्रसाधन आणि सादरीकरण यांना लागणाऱ्या वेळात काही ही कल नसून त्यांचा विशेष क्रम ठरवून रंगमंच अगदी कमी वेळ मोकळे ठेवणे, हे मोठे आव्हान आहे. या बाबतीतील गणिती पद्धत खालील पायऱ्या सुचवते :

पायरी १ : तक्ता १ मधील स्तंभ दोन आणि तीन मधील वेळा तपासून सर्वात कमी वेळ कुठला आहे तो निवडा. जर दोन किंवा अधिक वेळा सारख्या असतील तर त्यातील कुठली ही एक निवडा.

पायरी २ : जर निवड झालेला सर्वात कमी वेळ दुसऱ्या स्तंभातला असेल. तर त्या खेळ घटकाला कार्यक्रमाच्या क्रमात पहिले (डावीकडून पहिले) स्थान द्या. जर तो वेळ तिसऱ्या स्तंभातला असेल तर तो खेळ घटक कार्यक्रमात शेवटच्या (उजवीकडून पहिल्या) स्थानावर ठेवा. या प्रकारे निवडलेला घटक पुढील आकडेमोडीसाठी बाद करा (त्या वर फूली मारा).

पायरी ३ : तक्ता १ मधील उर्वरित वेळा (स्तंभ दोन आणि तीन मधील) तपासून सर्वात कमी वेळ कुठला आहे हे शोधा. त्यावर पायरी २ प्रमाणे प्रक्रिया करा. ही प्रक्रिया सर्व खेळ घटक संपेपर्यंत करत राहा.

या पद्धतीने निर्माण केलेला खेळ घटकांचा क्रम रंगमंच किमान वेळ मोकळा ठेवणारा असेल.

आपल्या उदाहरणातील तक्ता १ मध्ये प खेळ घटकाचा ९ मिनिटे हा वेळ सर्वात कमी आहे आणि तो स्तंभ दोनमध्ये आहे. म्हणजे प हा डावीकडून पहिल्या स्थानावर ठेवला जाईल. आता प खेळ घटक बाद करून तक्ता १ मधील वेळा बघितल्यास, ब खेळ घटकाचा १० मिनिटे हा खेळ सर्वात कमी असून तो स्तंभ तीनमध्ये आहे. म्हणजे ब चे स्थान कार्यक्रमात उजवीकडून पहिले ठेवले जाईल. आता ब खेळ घटक बाद करून ही प्रक्रिया सर्व खेळ घटक संपेपर्यंत परत परत केल्यास आकृती १ मध्ये दाखवल्या प्रमाणे कार्यक्रमातील खेळ घटकांचा क्रम तयार होईल.

क्रम :	१	२	३	४	५	६	७	८
खेळ घटक :	प	भ	अ	म	फ	क	ड	ब

आकृती १

आकृती १ मधील खेळ घटकांचा क्रम वापरल्यास कार्यक्रम कसा पार पडेल हे तक्ता २ मध्ये मांडले आहे.

तक्ता २

खेळ घटक	**रंगभूषा प्रसाधन (मिनिटे)**			**सादरीकरण (मिनिटे)**		
	सुरू	**प्रक्रिया**	**अंत**	**सुरू**	**प्रक्रिया**	**अंत**
प	०	९	९	९	१३	२२
भ	९	१६	२५	२५	२३	४८
अ	२५	२०	४५	४८	२५	७३
म	४५	२५	७०	७३	२१	९४
फ	७०	१८	८८	९४	१५	१०९
क	८८	१४	१०२	१०९	१२	१२१
ड	१०२	१३	११५	१२१	११	१३२
ब	११५	१२	१२७	१३२	१०	१४२

एकूण कार्यक्रम खेळ घटकांच्या वरील क्रमाने केल्यास १४२ मिनिटे लागतील हे तक्ता २ दाखवतो. असे केल्यास रंगभूषा प्रसाधन सुविधांचा वापर सतत १२७ मिनिटे केला जाईल, तर सादरीकरणात सुरवातीची ९ मिनिटे आणि दुसरा खेळ घटक भ चे रंगभूषा प्रसाधन होण्यात उशीर झालेली ३ मिनिटे (तक्ता २ मधील भ ची ओळ बघा) म्हणजे एकूण १२ मिनिटे एवढा वेळ रंगमंच मोकळा राहील. अर्थातच निवेदक हा वेळ सहजपणे भरून काढू शकेल. त्यानंतर मात्र एका पाठोपाठ एक असे उर्वरित खेळ घटक सादर करता येतील. तक्ता २ असे ही दाखवतो की पहिले दोन खेळ सोडल्यास उर्वरित सर्व खेळ घटकांचे कलाकार प्रत्येक खेळाच्या ३ ते ७ मिनिटे आधी सजून तयार असतील व घाईगर्दीचा तणाव त्यांना जाणवणार नाही.

खेळ घटकांच्या वेळात कुठल्याही ही बाबतीत फरक झाला किंवा त्यांची संख्या बदलली, तर हे गणित परत करावे लागेल. पण ते किचकट नाही याची कल्पना आली असेल. व्यवस्थापकाला प्रत्येक खेळ घटकात कलाकार कसे सामिल करावे जेणे करून लागोपाठ प्रयोग करण्यास कुणालाही भाग पडू नये यासाठी मार्गदर्शन देखील या पद्धतीमुळे मिळते.

विविध उपयोग

वरील गणिती पद्धतीला 'जॉनसनस् अॅल्गोरिदम' म्हणतात, ती एस. एम. जॉनसन याने १९५४ मध्ये मूळात दोन यंत्रे (मशीन्स) आणि अनेक कामे (जॉब्स) यासाठी विकसित केली होती. प्रत्येक कामाचा दोन्ही यंत्रावरील प्रक्रियेचा वेळ लक्षात घेऊन कुठलेही यंत्र कमीत कमी वेळ रिकामे राहील अशा तऱ्हेने कामांचा क्रम ठरवणे असे उद्देश त्याने ठेवले होते. या पद्धतीचा अर्थातच विविध प्रकारे गणिती विस्तार झाला असून मोठ्या प्रमाणात तिचा वापर केला जातो. अशा प्रकारचे क्रम ठरवण्याचे गणित *सिक्वेन्सिंग* असा ऑपरेशनल रिसर्चचा एक भाग म्हणून ओळखले जाते. यात संशोधनाला खूप वाव आहे.

गणिताचा उपयोग सांस्कृतिक कार्यक्रम व्यवस्थापनासाठी करता येणे हे त्याच्या बहुरंगी उपयोजन क्षमतेचे एक सुंदर उदाहरण आहे.

⌘⌘⌘

३४

माहिती हाताळण्याचे गणित

मानवी संस्कृतीचा ऐतिहासिक व आर्थिक प्रगतिचा आलेख असे दाखवतो की प्रथम सुमारे दहा हजार वर्षे कृषि, त्यानंतर ५०० वर्षे उद्योग/कारखाने आणि मागील ५० वर्षे सेवा आणि माहिती विनिमय हे विकासासाठी सर्वात महत्त्वाचे घटक ठरले आहेत. सन १९६० नंतर एकूण सर्व क्षेत्रांत एका बाजूने आलेला माहितीचा पूर किंवा घडलेला माहितीचा विस्फोट, तर दुसऱ्या बाजूला अंकीय (डिजिटल) तंत्रज्ञानाने घडवलेली क्रांति, या दोघांचा संगम होऊन सध्याचे *माहिती युग* निर्माण झाले आहे. सततपणे प्रगत होत असलेले संगणक, संगणकांची जाळी, आंतरजाळे (इंटरनेट), भ्रमण दूरध्वनी (मोबाइल टेलिफोन) आणि त्यांच्याशी संलग्न विविध साधने, उपकरणे व आज्ञा-प्रणाली यांचा प्रचंड रेटा या युगाला वेगाने पुढे नेत आहे. तरी या माहिती क्षेत्राचा अभ्यास आता अतिआवश्यक झाला आहे. त्याचे तीन मुख्य विभाग पुढील प्रमाणे आहेत. विशेष बाब म्हणजे माहिती क्षेत्राच्या या तिन्ही विभागात गणिताचा वापर मोठ्या प्रमाणात होतो : १) माहिती सिद्धांत (इन्फर्मेशन थेयरी), २) माहिती विज्ञान (इन्फर्मेशन सायन्स), ३) माहिती तंत्रज्ञान (इन्फर्मेशन टेक्नोलोजी).

माहिती सिद्धांत

माहिती सिद्धांताचा पाया रचण्याचे श्रेय अमेरिकन गणितज्ञ व तंत्रज्ञ सी. इ. शेनॉन (१९१६-२००१) यांना जाते. त्यानी संदेश किंवा माहिती यंत्राद्वारे प्रेषित करताना उद्‌भवू शकणारा गोंधळ (नॉइझ) याची शक्यता लक्षात घेऊन इष्टतमपणे संदेश पाठवण्याची क्षमता मोजण्याचे गणित मांडले व काही सिद्धांत आणि सूत्रे विकसित केली ज्यांचा प्रत्यक्षात वापर मोठ्या प्रमाणावर होतो. उष्मागतिमान शास्त्रातील (थर्मोडॉयनेमिक्स) प्रणालीची एन्ट्रोपीची म्हणजेच

अनिश्चितीची संकल्पना त्यानी संदेश किंवा माहिती देवघेव प्रणालीच्या संदर्भात परिवर्तित करून अनेक उपयुक्त बाबीवर प्रकाश टाकला.

माहिती विज्ञान

माहिती विज्ञान हे माहितीची सुयोग्य संरचना करणे, मागितलेल्या विषयाबाबत अचूक व उपयुक्त अशी माहिती सदर संरचित माहितीसाठ्यातून (डेटाबेस) किमान वेळेत काढून देणे, विविध विषयांतील माहितीचा परस्पर संबंध जोडणे अशा बाबींचा अभ्यास करते. यात सुद्धा गणिताचे योगदान कळीचे ठरत आहेत. उदाहरणार्थ, बूलचे बीजगणित हे माहितीसाठ्यातून आवश्यक ती माहिती शोधण्यासाठी मोठ्या प्रमाणात वापरले जाते. सध्याच्या गुगल, याहू आदी सर्व तांत्रिक प्रणाली त्याचा उपयोग संगणकीय आंतरजाळे आणि संकेतस्थळे यावरील प्रचंड प्रमाणात उपलब्ध असलेल्या माहितीचा शोध घेण्यासाठी करतात हे विशेष. त्यासाठी या बीजगणितावर आधारित अनेक शोध-पद्धती (सर्च ॲल्गोरिदम) विकसित करण्यात आल्या असून त्यात सातत्याने भर पडत आहे. पारंपारिक ग्रंथालयीन कार्ये जशी की माहिती गोळा करणे, संकलन करणे व शोधणे या पद्धतींना माहिती विज्ञानाची जोड त्यामुळे अनिवार्य ठरली आहे. म्हणूनच आता आपल्या देशात देखील 'ग्रंथालय आणि माहितीशास्त्र' अशा स्नातक व स्नातकोत्तर पदव्यांसाठी शैक्षणिक पाठ्यक्रम विकसित झाले आहेत.

माहिती सिद्धांत व माहिती विज्ञानातील काही गणिती संकल्पना एकत्रपणे माहितीची किंवा संदेशाची गोपनीय रचना करणे व त्यांची उकल करणे यासाठी विकसित केल्या जात आहेत. कोडींग थेयरी अशी एक स्वतंत्र गणिती उपशाखा त्यासाठी निर्माण झाली आहे. संदेशाला गूढ स्वरूपात बदलणे व तो प्राप्त झाल्यावर त्याला मूळ स्वरूपात परिवर्तित करणे या प्रक्रियेत मूळ संख्यांचा (प्राइम नंबर्स) वापर अतिशय महत्त्वाचा ठरतो. सर्व जगभर अशा गणिती प्रक्रिया सक्षम करण्याचे प्रयत्न अविरत चालू आहेत. या संदर्भात अंकशास्त्र, त्रिकोणमिती, बीजगणित आणि संख्याशास्त्रातील अनेक संकल्पना व प्रगत पद्धतींचा वापर प्रामुख्याने होतो. जवळपास सर्व देशांत संरक्षण मंत्रालय, परराष्ट्र संबंध मंत्रालय, बँका अशा संस्था सदर प्रकल्पांसाठी शैक्षणिक व अन्य संशोधन संस्थातील गणितज्ञांना खास निधी उपलब्ध करून देतात.

माहिती तंत्रज्ञान

माहिती क्षेत्राचा तिसरा विभाग तंत्रज्ञानाचा असून त्याचा गाभा अंकीय तंत्रज्ञान आहे आणि ते संगणक ते कॅमेरा अशा सर्व उपकरणांचा आता आधार आहे. हे अंकीय

तंत्रज्ञान मूळतः अंकगणित व बीजगणित यातील संकल्पना व रिती-पद्धती वापरून विकसित झाले आहे. यासाठी संख्यांना दशमान पद्धती ऐवजी द्विमान पद्धतीत मांडून सर्व गणिती व तर्कशास्त्रीय प्रक्रिया करणे असे केले जाते जे संगणक व त्यासमान काम करणारी उपकरणे सुलभतेने हाताळू शकतात. या मूलभूत गणिताचा आणखीन विस्तार झाला असून त्याआधारे नवीन संगणक प्रणाली विकसित होत आहेत. एकूणच संगणक व माहिती तंत्रज्ञानाची झेप गतिमान करण्यास गणिताच्या विविध शाखा मोठ्या प्रमाणात कारणीभूत ठरल्या आहेत यात शंका नाही.

त्याचप्रमाणे माहिती क्षेत्रातील निरनिराळ्या उपलब्धिंमुळे गणित क्षेत्रातही अनेक महत्त्वपूर्ण बदल होत आहेत. उदाहरणार्थ, गणिती प्रमेये सिद्ध करण्यासाठी संगणकाची मदत घेणे, संगणकाची शक्तीस्थळे कमाल प्रमाणात वापरता येतील अशा गणिती पद्धती विकसित करणे आणि जटील प्रश्न, जे की गणिती प्रतिकृतीने देखील सोडवणे अशक्यप्राय असते त्यासाठी संगणकाधारित प्रतिरूपता (सिम्यूलेशन) वापरणे. या अर्थाने गणित आणि माहिती क्षेत्रातील विविध घटक आता एकमेकांच्या विकासासाठी पूरक ठरत आहे.

माहिती व्यवस्थापन आणि गणित

या माहिती क्षेत्रातील लक्षणीय विकासावरून मानवाची माहिती हाताळण्याची क्षमता बरीच वाढलेली आहे असे स्पष्ट आहे. अंकीय भाषेत ती $१०^{१४}$ बिटस् (एकाच्या पुढे चौदा शून्ये अशी संख्या) अशी आहे. मात्र विश्वाचे एकूण विराट स्वरूप बघता ती नगण्यच आहे. ती वाढवण्यासाठी गणित तसेच उर्जा हाताळण्याची क्षमता किती तरी पटीने विकसित करणे आवश्यक आहे.

गणित व त्यावर आधारित तंत्रज्ञान यांची जोड मानवाला अपरिहार्य आहे कारण माणसाची माहिती हाताळण्याची नैसर्गिक शक्ती अगदी मर्यादित आहे हे अनेक अभ्यासातून सिद्ध झाले आहे. ती क्षमता सामान्यपणे किती आहे याचे मोजमाप गेली अनेक वर्षे केले जात आहे. त्या अभ्यासांचे गणिती विश्लेषण माणसाच्या स्वतःबद्दल असलेल्या अभिमान व श्रेष्ठत्वाच्या प्रौढीला धक्का देणारे आहे, कसे ते बघुया.

सामान्य माणसाची माहिती हाताळण्याची स्वाभाविक सीमा ठरवण्यासाठी खालील प्रक्रिया लक्षात घेतल्या गेल्या आहेत :

१) दिलेल्या संचातील विविध वस्तूमधील फरक बिनचुकपणे ओळखणे

२) काही ठरावीक वेळापूर्वी पाहिलेल्या सर्व वस्तू न थांबता आठवणे

३) बराच काळ उलटून गेलेल्या गोष्टी तपशीलवार आठवणे

४) एखाद्या कठीण समस्येबाबत दिलेल्या मर्यादित वेळेत बहुसंख्य पर्याय सुचवणे
५) उपलब्ध पर्यायांतून इष्टतम पर्याय निवडणे

वरील निकष वापरून जी. मिलर या मानसशास्त्रज्ञाने अनेक नमुना गटांची चाचणी करून १९५६ मध्ये माणसाची माहिती बिनचुकपणे हाताळण्याची किमान क्षमता ५, तर कमाल क्षमता ९ असते, असे प्रतिपादित केले. म्हणजे सामान्यतः माणूस पाच गोष्टी आठवणे किंवा त्यातील फरक अचूकपणे करणे हे न गोंधळता करू शकतो, मात्र गोष्टींची संख्या ९ पेक्षा अधिक झाली की तो गोंधळतो. या निष्कर्षाची चर्चा जगभर झाली व त्याचा वापर व्यवस्थापन क्षेत्रात, शैक्षणिक व इतर संस्थातील निवड पद्धतीत विविध प्रकारे सुरू झाला.

नोबेल पुरस्कार विजेता (अर्थशास्त्र) एच. सायमन याने सदर प्रयोगात थोडी विविधता आणून व तिची व्याप्ती वाढवून सन १९७४ मध्ये असे मांडले की मनुष्याची माहिती हाताळण्याची क्षमता ५ ठरवणे अधिक उचित ठरेल. ५ ते ७ अक्षरे असलेला शब्द, २ ते ४ शब्द असलेली वाक्ये व ८ आकडी संख्या माणूस सहसा आठवू शकतो किंवा त्यातील फरक चटकन ओळखू शकतो.

त्यानंतर १९८० च्या दशकात जे. वॉरफिल्ड या गणिती व तंत्रज्ञाने वरील क्षमता ३ असावी असे प्रतिपादित केले. त्याच्या मते सहसा मानवी–बुद्धि केवळ तीन गोष्टींचा बिनचूकपणे विचार करू शकते. या निष्कर्षाचा वापर अनेक बाबतीत केला गेला असून तो फलदायी ठरला अहे. अनेक जाहिराती तसेच कंपन्या तीन बोधवाक्ये त्यामुळे वापरताना दिसतात. अशा सर्व प्रयोगात त्रुटी असणे हे मान्य आहे, तरी देखील माणसाची माहिती हाताळण्याची नैसर्गिक क्षमता अल्प आहे हे नाकारता येणार नाही. तंत्रज्ञानाची साधने त्यादृष्टिने आपल्या इंद्रियांचा विस्तार मानली पाहिजेत जसे की मायक्रोस्कोप व टेलिस्कोपमुळे आपली दृष्टी अनेक पटीत वाढली आहे, आणि गणिताच्या उपयोग या तंत्रज्ञान विकसासाठी अनिवार्य आहे.

माहितीची चौफेरपणे वाढत असलेली निर्मिती, जागतिक स्तरावर तिची देवघेव आणि तिचे विश्लेषण करून नवीन ज्ञान विकसित करणे हे आगामी काळाची मोठी गरज ठरणार आहे. या सर्व बाबतीत गणिताची जोड अत्यंत महत्त्वाचा घटक ठरणार आहे. म्हणूनच १९८२ पासून दर चार वर्षांनी इन्फर्मेशन सायन्समधील उल्लेखनीय गणिती कामगिरीसाठी आंतरराष्ट्रीय स्तरावर मानाचे असे राल्फ नेव्हालिना पारितोषिक दिले जाते. तरी गणितविज्ञानात रस असलेल्या व्यक्तींनी माहिती क्षेत्रात कारकीर्द घडवण्याचा विचार करावा.

❋❋❋

३५

प्राथमिकता ठरवण्याचे गणित

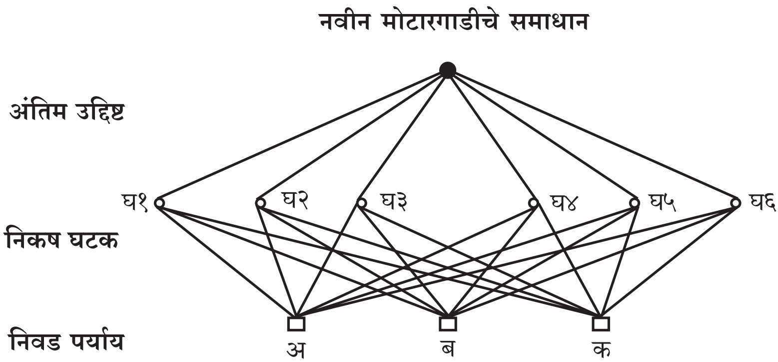
तंत्रज्ञान विकास आणि वाढत्या स्पर्धेमुळे आपल्याला आता बाजारात सहसा कुठल्याही उत्पादनासाठी किंवा सेवेसाठी अनेक पर्याय उपलब्ध असतात. साध्या साबूपासून ते प्रगत संगणक या सर्वांची अतिशय आकर्षक अशी विविध उत्पादने दिसतात की खरेदी करताना गोंधळ उडणे साहजिकच असते. त्या प्रत्येकाची सर्व प्रकारची उपलब्ध माहिती गोळा करून आणि तुलना करून निर्णय घेणे असे रास्त वाटते. मात्र यासाठी भरपूर वेळ काढणे ही एक बाब आहे, तर तुलना कशी करायची ही दुसरी अतिशय महत्त्वाची बाब आहे. तुलनेचे घटक कुठले असावेत याचा विचार करणे त्यामुळे भाग पडते आणि मग सर्व घटक समान महत्त्वाचे आहेत का, असा प्रश्न उद्‌भवतो. या संपूर्ण प्रक्रियेला गणिताची बैठक वापरून मार्गदर्शन मिळवणे कसे शक्य आहे ते या लेखात बघुया.

गणिती पद्धत

कुठल्याही निवड प्रक्रियेत निवड करणारी व्यक्ति किंवा समिती यांचे अनुभव, विचार, अंदाज व कल अशा गुणात्मक बाबींचा समावेश स्वाभाविकपणे असतो. म्हणजेच गणिती बैठक तयार करताना अशा मानसिक घटकांना सामावून घेणे अपेक्षित आहे. या सर्व गोष्टींचा विचार करून टी. साटी या गणितज्ञाने १९७० च्या दशकात प्राथमिकता किंवा अग्रक्रम ठरवण्याची एक पद्धत विकसित केली जिला *ॲनेलेटिक हायरार्कि प्रोसेस* असे नाव दिले गेले आहे.

या पद्धतीनुसार दिलेल्या निर्णय परिस्थितीत निवड प्रक्रियेला प्रथम एका उतरंडीच्या चौकटीत मांडले जाते. तिचे शिखर हे अंतिम उद्दिष्ट किंवा ध्येय

दर्शवते. ते गाठवण्यासाठी कुठले निकर्ष विचारात घ्यायचे ते त्याच्या खालच्या पायऱ्यांवर आणि ज्या गोष्टींचा प्राथमिकतेनुसार क्रम लावायचा आहे त्या सर्वात खालच्या पायरीवर मांडणे असे चित्र उभे केले जाते. उदाहरणार्थ, आकृती १ असे एक निर्णयचित्र दाखवते. यामध्ये सर्वात वरची पायरी नवीन मोटारगाडीमुळे एकूण समाधान मिळणे असे अंतिम उद्दिष्ट दाखवते. आकृती १ मधील दुसरी पायरी नवीन मोटारगाडीच्या निवडीचे नमुनादाखल सहा घटक दाखवते : घ१ – आकार, घ२– किंमत, घ३ – इंधन खर्च, घ४ – रंग, घ५ – नाव आणि घ६ – भारवाहन क्षमता. हे सर्व घटक अंतिम उद्दिष्ट गाठण्यास योगदान करतात हे त्यांना जोडणाऱ्या रेषा दाखवतात. तिसऱ्या पायरीवर आकृती १ मध्ये अ, ब आणि क अशा तीन विचाराधीन मोटारगाड्या आहेत ज्यांच्या निवडीचा अग्रक्रम ठरवायचा आहे. ते तिन्ही पर्याय वरील सहा निकष घटकांना जोडलेले दाखवले आहेत म्हणजे त्यांची तुलना त्या सर्व निकषांच्या आधारे करायची आहे.



आकृती १

प्रत्येक पायरीवरील बाबींची तुलना करताना तिच्या वरच्या लगतच्या पायरीवरील बाबींची कमाल पूर्तता होणे हे लक्षात ठेवणे महत्त्वाचे असते. अशी तुलना करण्यासाठी एक मोजपट्टी मानसशास्त्रीय अभ्यासांवरून विकसित केली गेली आहे. ती तक्ता १ मध्ये दिली आहे. यात १ ते ९ अंक वापरले असून प्रत्येक अंक दोन गोष्टीतील फरकाची तीव्रता किंवा महत्वाची प्रमाणता दर्शवतो.

तक्ता १

तुलनेची तीव्रता	स्पष्टीकरण
१	दोन्ही गोष्टी **समान महत्त्वाच्या** आहेत.
३	एक गोष्ट दुसऱ्या गोष्टीपेक्षा **थोडी अधिक महत्त्वाची** आहे.
५	एक गोष्ट दुसऱ्या गोष्टीपेक्षा **फार अधिक महत्त्वाची** आहे.
७	एक गोष्ट दुसऱ्या गोष्टीपेक्षा **अतिशय अधिक महत्त्वाची** आहे.
९	एक गोष्ट दुसऱ्या गोष्टीपेक्षा **निर्णायकपणे महत्त्वाची** आहे.
२,४,६,८	वरील तीव्रतेच्यामधील तीव्रता अवस्था

आता या मोजपट्टीच्या मदतीने घ१, घ२, ... घ६ घटकांची एकमेकांशी तुलना करू व तसे करताना अंतिम उद्दिष्ट गाठण्यात त्यांचे योगदान लक्षात घेणे हे मार्गदर्शक तत्व वापरू. असे करताना आपण आपल्या कल्पना, माहिती, अनुभव व वैयक्तिक आवडी-निवडी आणि मते विचारात घेऊ. त्याप्रमाणे तयार झालेली तुलना-सारणी (मॅट्रिक्स) तक्ता २ मध्ये दाखवली आहे. यातील पहिल्या ओळीतील दुसरी संख्या ५ म्हणजे समाधानासाठी घटक घ१ हा घ२ पेक्षा फार अधिक महत्त्वाचा आहे, तर घ१ हा घ३ पेक्षा अतिशय महत्त्वाचा आहे असे तिसरी संख्या ७ दाखवते. या प्रमाणे दोन घटकांची एका वेळेस तुलना करत पूर्ण तक्ता २ तयार झालेला आहे.

तक्ता २

	घ१	**घ२**	**घ३**	**घ४**	**घ५**	**घ६**
घ१	१	५	७	५	३	१
घ२	१/५	१	३	१/५	१/६	१/६
घ३	१/७	१/३	१	१/४	१/५	१/५
घ४	१/५	५	४	१	१/५	१/६
घ५	१/३	६	५	५	१	१
घ६	१	६	५	६	१	१

याचप्रमाणे घ१ हा घटक परिपूर्ण कसा होईल या दृष्टिने अ, ब आणि क यांची तुलना त्याच मोजपट्टीने (तक्ता १) करून प्राप्त झालेली तुलना - सारणी तक्ता ३ मध्ये मांडली आहे. तशीच प्रक्रिया घ२ ते घ६ घटकांबाबत करून तक्ता ३ ते तक्ता ८ मध्ये मांडल्या आहेत.

तक्ता ३

घ१

	अ	ब	क
अ	१	१/३	१/२
ब	३	१	३
क	२	१/३	१

तक्ता ४

घ२

	अ	ब	क
अ	१	१	१
ब	१	१	१
क	१	१	१

तक्ता ५

घ३

	अ	ब	क
अ	१	५	१
ब	१/५	१	१/५
क	१	५	१

तक्ता ६

घ४

	अ	ब	क
अ	१	९	७
ब	१/९	१	१/५
क	१/७	५	१

तक्ता ७

घ५

	अ	ब	क
अ	१	१/२	१
ब	२	१	२
क	१	१/२	१

तक्ता ८

घ६

	अ	ब	क
अ	१	६	४
ब	१/६	१	१/३
क	१/४	३	१

या सर्व तुलना-सारणीवर बीजगणितातील काही प्रक्रिया करून अ, ब आणि क यांचे मोटारगाडीचे समाधान मिळण्यात सापेक्ष योगदान खालील प्राथमिकता वजनात दाखवले आहे :

मोटरगाडी	अ	=	०.४०
मोटारगाडी	ब	=	०.३५
मोटारगाडी	क	=	०.२५
			१.००

म्हणजे ज्याप्रकारे तुलना-सारणी भरताना विचार केला गेला त्यानुसार मोटारगाडी अ हा पर्याय प्रथम क्रमांकावर आहे. पण पर्याय ब हा पर्याय अ पासून वजनात ०.०५ एवढाच पिछाडीवर आहे तरी पर्याय ब चा सुद्धा विचार

प्रत्यक्षात होऊ शकतो. अशी बरोबरीची स्थिती असल्यास एक सर्वस्वी नवीन घटक विचारात घेऊन कोंडी फोडता येते व निर्णय घेता येतो.

मानवी विचाराला गणिती जोड

वरील उदाहरणावरून या पद्धतीची अनेक वैशिष्टये समोर आली आहेत. एक म्हणजे ही पद्धत तीन भागात विभागली आहे. पहिला विभाग म्हणजे पर्याय निवडीच्या परिस्थितीला एका उतरंड आकृतीत मांडणे (आकृती १ प्रमाणे) ज्यामुळे सर्व घटक व त्यांचे परस्पर संबंध स्पष्ट होतात. दुसरा विभाग म्हणजे मोजपट्टी (तक्ता १ प्रमाणे) वापरून आवश्यक अशा तुलना-सारणी तयार करणे. असे एक व्यक्ती तिच्या मतानुसार किंवा गटाने सखोल चर्चा करून प्रत्येक सारणी सहजपणे तयार करणे शक्य असते. तिसरा विभाग गणिती प्रक्रिया करून पर्यायांत सापेक्ष प्राथमिकता किंवा अनुक्रम मांडणे असा आहे. संपूर्ण प्रक्रिया पादरदर्शक आहे व अनेक लोकांचा सहभाग एका सुलभ चौकटीत वापरून पुढे जाते. त्यामुळे लोकांना तो निर्णय आपला आहे अशी जाणीव होते व ते त्यात नंतर ढवळाढवळ सहसा करत नाहीत असा अनुभव आहे.

सदर गणिती प्रक्रिया हाताने करण्यासारखी आहे. मात्र घटक व पर्याय अनेक असल्यास संगणकाद्वारे ती करणे सहज शक्य आहे. त्यामुळे कोणालाही त्या तुलना-सारणीत काही बदल केल्यास पर्याय प्राथमिकतेवर काय प्रभाव पडेल हे तपासणे सहज शक्य आहे. या पद्धतीच्या गणिती पैलूंवर अनेक प्रकारचे संशोधन चालू आहे.

उपरोक्त विशेषतांमुळे सदर पद्धतीचा वापर आणि उपयोजन जगभर अनेक क्षेत्रांत सातत्याने होत आलेला आहे. त्यासंबंधी विपुल साहित्य उपलब्ध आहे. लोकांचा सहभाग घेऊन सार्वजनिक प्रकल्पांचा अग्रक्रम ठरवणे, संसाधनांचे योग्य वितरण करणे, खेळाडूंची निवड करणे अशा असंख्य निर्णय घेण्याच्या बाबतीत ही पद्धत अतिशय उपयोगी ठरली आहे. तरी ही पद्धत वापरणे आणि तिचे गणित अधिक सखोल करणे याचा विचार व्हावा.

⌘⌘⌘

३६

गणितातील लवचिकता

गणित हे तर्कशास्त्राप्रमाणे आणि औपचारिक नियमांच्या चौकटीत बहुधा मांडले जात असल्याने त्याची आखणी चाकोरीबद्ध असते. त्यामुळे गणिती प्रक्रियांना एक अजोड असे परिमाण प्राप्त होते, आणि गणितावर आधारित निष्कर्ष एक प्रकारची अंतिमता दाखवतात. असे सहसा असले तरी गणितात देखील लवचिकता काही अंशात आढळते हे विशेष. महत्त्वाचे म्हणजे गणितज्ञ देखील एकाच प्रश्नासाठी अनेक पद्धती विकसित करताना हा उद्देश समोर ठेवतात.

आपण गणितातील लवचिकता एका सोप्या उदाहरणाद्वारे पाहू. गणितातील एक साधा नियम असे सांगतो की दोन चल किंवा परिवर्तकांचे (व्हेरियेबल्स) मूल्य काढायचे असल्यास, दोन एककालीन समीकरणे उपस्थित पाहिजेत. उदाहरणार्थ, अ + ब = १२ आणि ३अ – २ब = ६ या दोन समीकरणांना सोडवल्यावर अ = ६ आणि ब = ६ असे उत्तर मिळते. थोडक्यात, एककालीन समीकरणांची संख्या व त्यातील चलांची संख्या सारखी पाहिजे. पण प्रत्यक्षात समीकरणांची संख्या चलांच्या संख्येपेक्षा कमी असल्यास काय करायचे ? गणितातील लवचिकता इथे कामी येते.

डायफंटुसचे कार्य

अशा परिस्थितीना हाताळण्याचे गणिती मार्ग उपलब्ध आहेत. मुख्य म्हणजे असा विचार गणिताच्या सुरवातीपासून होत आलेला आहे. या संदर्भात ग्रीक गणितज्ञ डायफंटुस (बहुधा इ.स.२००–२८४ या काळात) याचे कार्य फार महत्त्वाचे आहे. डायफंटुस हा अलेक्झांड्रीयानिवासी होता आणि त्याचे बीजगणितातील कार्य हे त्याच्या सन २५० च्या सुमारास लिहिले गेलेल्या

'अरिथमेरिका' या १३ खंडी ग्रंथात मांडले आहे. ते युक्लिडच्या भूमिती रचणारे 'एलिमेण्टस' या तोडीचे असे बीजगणितातील मूलभूत पुस्तक मानले जाते. विशेष म्हणजे अलेक्झांड्रीयातील जगप्रसिद्ध ग्रंथालयाचा सातव्या शतकात पूर्ण नाश झाला तरी सुदैवाने डायफंटुसच्या पुस्तकांचा काही भाग नामशेष होण्यापासून वाचला. त्याचे अरेबिक व नंतर इतर भाषांत रूपांतर केले गेले, त्यामुळे त्याच्या गणिती पद्धतींचा मोलाचा ठेवा जोपासला गेला. १६२१ मध्ये लॅटिन भाषेत त्याचे ते अनुवादित पुस्तक प्रसिद्ध झाले, ज्याचे मुखपृष्ठ सोबतच्या चित्रात दाखवले आहे. त्याचे फ्रेंच भाषेतील रूपांतर पुढे प्रसिद्ध झाले. उल्लेखनीय बाब म्हणजे त्या फ्रेंच पुस्तकाच्या स्वतःच्या प्रतिमध्ये पी. फर्माने (१६०१–६५) आपला सुप्रसिद्ध अंतिम सिद्धांत मांडला आणि असे लिहिले की मला याची सिद्धता माहित आहे, पण या पुस्तकातील समासाची जागी ती मांडण्यास पुरेशी नाही (१६३७)! आपणास माहित असेल की तो सिद्धांत १९९३–९४ मध्ये जवळपास ३५० वर्षांनी संपूर्णपणे सोडवला गेला.

डायफंटुसची पद्धत



आपण डायफंटुसची असंतुलित समीकरण सोडवण्याची पद्धत ज्यात चल केवळ पूर्णांकच पाहिजे, एका उदाहरणाने बघु या. समजा तुम्हाला असे सांगितले की कालच्या एक दिवसीय क्रिकेट सामन्यात एका धडाकेबाज फलंदाजाने ३६ धावा फटकावल्या व त्याही फक्त काही चौकार आणि षटकार यांच्या मदतीने, तर त्याने किती चौकार आणि षटकार खेचले असतील ? सरळ धोपट मार्ग म्हणजे चौकार आणि षटकारांची सर्व पूर्णांक मिश्रणे लिहून उत्तर शोधायचे. मात्र ते वेळखाऊ आहे. म्हणून समजा च म्हणजे चौकार आणि ष म्हणजे षटकार असे पूर्णांक आहेत, तर आपल्याला खालील समीकरण मिळेल :

४ च + ६ ष = ३६, च आणि ष पूर्णांक आहेत

अथवा २ च + ३ ष = १८.

याचा अर्थ आपल्याकडे एक समीकरण, पण दोन चल अशी असंतुलित परिस्थिती आहे. यातून मार्ग असा काढता येईल. आपण या समीकरणाला असे मांडू,

$$३ ष = १८ - २ च$$

$$\text{किंवा, } ३ ष = २ (९ - च)$$

याचा अर्थ असा होतो की २ ने ३ष ला पूर्ण भाग गेला पाहिजे. पण ३ ला २ ने पूर्ण भाग जात नसल्यामुळे २ ने ष ला पूर्ण भाग गेला पाहिजे. याचा अर्थ आपण ष = २ क असे लिहू शकतो, जिथे क हा एक अज्ञात पूर्णांक आहे. ष चे असे मूल्य वरील शेवटच्या समीकरणात घातल्यास

$$३ (२ क) = २ (९ - च)$$

$$\text{किंवा } २ (३ क) = २(९ - च)$$

$$\text{किंवा } ३ क = ९ - च$$

याचा अर्थ उजवी कडील बाजू ९ पेक्षा मोठी असू शकत नाही. म्हणजेच, क चे मूल्य केवळ ०,१,२,३ या पैकी काही ही असू शकते. मात्र क = ० ठेवल्यास ष = ० (शून्य षटकार), आणि क = ३ ठेवल्यास च = ० (शून्य चौकार) असे असेल. पण तसे घडलेले नाही, कारण आपल्याला सांगितले आहे की संपूर्ण ३६ धावा चौकार आणि षटकारांनी जमवल्या होत्या. तरी क = १ असल्यास च = ६ आणि ष = २, आणि क = २ असल्यास च = ३ आणि ष = ४ अशी दोनच उत्तरे मिळतात. ही पद्धत संगणकाद्वारे मोठ्या गणितासाठी ही वापरता येते.

डायफंटुसने अशी विविध प्रकारची समीकरणे (अधिक घात संख्या असलेली), ज्यांची उत्तरे पूर्णांकात पाहिजे, सोडवण्यासाठी काही पद्धती दिल्या आहेत. अशाच प्रकारच्या बीजगणितातील पद्धती ब्रह्मगुप्त या भारतीय गणितज्ञाने स्वतंत्रपणे सातव्या-आठव्या शतकात विकसित केल्या होत्या.

निष्कर्ष

वरील उदाहरण आणि चर्चेतून लक्षात येईल की गणित हे वाहणाऱ्या पाण्यासारखे आहे. त्याचा प्रवाह अडसरामुळे काही काळ थांबतो, पण नंतर गणित सहसा आपला मार्ग काढते. तरी अमूक एका प्रश्नाला सोडवण्यासाठी औपचारिक गणिती पद्धत शक्य नाही असे सिद्ध करणे ही प्रथम एक मोठी उपलब्धि मानली जाते, आणि नंतर तो प्रश्न सोडवण्याचे इतर मार्ग शोधण्याचे काम गणितज्ञ हाती घेतात. गणितातील लवचिकता तपासणे हा देखील अभ्यासाचा विषय होऊ शकतो.

टीप : लेखातील चित्र ज्या स्त्रोतातून घेतले आहे त्याचे आभार.

⌘⌘⌘

३७

गणितातील दक्षता

गणिती प्रक्रिया करताना आकडेमोडीत चूक होऊ नये याची दक्षता घेणे फार महत्त्वाचे असते. म्हणून शाळेपासूनच विद्यार्थ्यांना गणिती प्रश्न सोडवण्याचा सराव मोठ्या प्रमाणावर करणे, आणि ती बिनचूकपणे सोडवून व्यवस्थितपणे मांडणे, यावर भर देणे स्वाभाविक आहे. काढलेले उत्तर तपासण्यासाठी ताळे करून बघावे असे ही सांगितले जाते. मात्र अशी यांत्रिकपणे प्रक्रिया करत असताना गणिताच्या काही संकल्पना किंवा तांत्रिक बाबीकडे दुर्लक्ष होऊ शकते. म्हणजेच, गणित सोडवताना विविध पातळीवर दक्षता बाळगावी लागते.

चकवा निर्मिती

उदाहरण – १ : आपण वास्तव संख्यांसाठीचे साहचार्य (असोसियेटीव्हीटी) आणि क्रमपरिवर्ती (कम्युटेटीव्हीटी) चे नियम वापरून खालील आकडेमोडीचे एकमेव उत्तर काढतो :

१ + (०.०४ + ०.०४) = (१ + ०.०४) + ०.०४ = १.०८

संगणकावर हे गणित सोडवताना काही वेळा बेरीज, वजाबाकी केल्यावर दशांश (दशमलव) चिन्हानंतर केवळ एकच अंक मांडण्याची क्रिया वापरली जाते. त्यासाठी ०.०५ किंवा त्याहून मोठा अपूर्णांक ०.१ असा मांडला जातो, आणि त्याखालचा अपूर्णांक ०.० असा मांडला जातो.

असे झाल्यास आपल्याला १+(०.०४+०.०४) = १+(०.०८) =१+०.१=१.१ असे एक उत्तर मिळते, तर (१+०.०४) + ०.०४ = (१.०४) + ०.०४ = १.० + ०.०४ = १.०४ = १.० असे दुसऱ्या प्रकारे मांडल्यास उत्तर मिळते. तरी गणित मांडणीची दक्षता फार महत्त्वाची आहे, मुख्यतः संगणकाचा वापर करताना.

उदाहरण – २ : खालील दोन एककालीन समीकरणे सोडवल्यास,

१.००० अ + १.००० ब = १.०००

१.०१३ अ + १.०१६ ब = १.०२८

अ = –४ आणि ब = ५ असे उत्तर मिळते.

आता या दोन्ही समीकरणातील अचल संख्याना (कांस्टंटस्) अपूर्णांकाचा वर लावलेला नियम वापरून दशमलव चिन्हानंतर दोन अंक असे करून खालील प्रमाणे ती समीकरणे मांडता येतील :

१.०० अ + १.०० ब = १.००

१.०१ अ + १.०२ ब = १.०३

या एककालीन समीकरणांना सोडवल्यास अ = –१ आणि ब = २ असे पूर्णपणे वेगळे उत्तर मिळते.

वरील दोन्ही उदाहरणे अंकांची किंवा संख्यांची अस्थिरता (इनस्टेबिलिटी) यामुळे होणारे परिणाम दाखवतात. मोठ्या प्रमाणात आकडेवारीवर संगणकाद्वारे प्रक्रिया करताना सर्व प्रकारची काळजी घेणे त्यामुळे आवश्यक आहे. न्यूमरिकल ॲलजेब्रा किंवा न्यूमरिकल ॲनालिसिस हा उपविषय अशा प्रश्नांचा अभ्यास करण्यासाठी विकसित झाला आहे.

उदाहरण – ३ : खालील अनंत मालिकेची बेरीज काय असेल?

१–१+१–१+१–१+...........

आपण या मालिकेला असे मांडले तर,

स = (१ – १) + (१ – १) + (१ – १) + ...

= ० + ० + ० + ...

म्हणजे, स = ० असे उत्तर मिळते.

पण आपण तिला असे मांडले तर,

स = १ – (१–१) – (१–१) – ....

= १ – ० – ० – ....

म्हणजे, स=१ असे उत्तर मिळते.

आणखी वेगळ्या पद्धतीने तिला असे मांडले तर, स =१–(१–१+१–१+........), किंवा स = १ – स

म्हणजेच, २स = १ किंवा स = १/२ असे उत्तर मिळते.

अर्थातच एकाच प्रश्नाची अशी तीन पूर्णपणे वेगळी उत्तरे कशी मान्य करता येतील. खरे उत्तर असे आहे की ही मालिका दोलायमान किंवा अस्थिर (ओसिलेटिंग) अशा प्रकारची असून तिची बेरीज करणे शक्य नाही. अनंत

संख्येच्या मालिकांना बेरीज वजाबाकी अशा प्रक्रियांचे सान्त (फाइनाइट) मालिकेचे नियम सरसकट लावल्यामुळे अशी परिस्थिती निर्माण झाली. अशा मालिकांबाबत बरेच साहित्य उपलब्ध आहे.

उदाहरण – ४ : समजा एका प्रशिक्षणात एकूण १० पाठ्यक्रम परीक्षा आहेत व विद्यार्थी त्यापैकी कितीही पहिल्या सत्रात निवडून शकतात आणि उर्वरित दुसऱ्या सत्रात देऊ शकतात. समजा एका विद्यार्थ्याने पहिल्या सत्रात ८ परीक्षा दिल्या व तो २ मध्ये उतीर्ण झाला आणि दुसऱ्या सत्रात उर्वरित दोन्ही परीक्षेत तो उत्तीर्ण झाला. समजा दुसऱ्या विद्यार्थ्याने दोन्ही सत्रात पाच व पाच परीक्षा दिल्या आणि तो पहिल्या सत्रात १ तर दुसऱ्या सत्रात ४ मध्ये उत्तीर्ण झाला. खालील तक्ता हा सर्व तपशील दाखवतो :–

उत्तीर्ण होणे

	सत्र – १	**सत्र – २**	**पूर्ण प्रशिक्षण**
विद्यार्थी १	२/८	२/२	४/१०
विद्यार्थी २	१/५	४/५	५/१०

ह्या तक्त्यातील शेवटचा स्तंभ पाहिल्यास, विद्यार्थी २ ची एकूण कामगिरी विद्यार्थी १ पेक्षा सरस दिसते. मात्र सत्र–१ आणि सत्र–२ असे वेगळे बघितल्यास विद्यार्थी १ ची कामगिरी प्रत्येक सत्रात विद्यार्थी २ पेक्षा सरस आहे असे आढळते.

अर्थ लावताना दक्षता

म्हणूनच साधी सरासरी (मध्यमान) वापरताना देखील फार दक्षता बाळगणे आवश्यक असते. काही वेळा सरासरीची परिभाषा देखील वेगळी असू शकते. उदाहरणार्थ, क्रिकेटमध्ये फलंदाजाच्या धावांची सरासरी काढताना नाबाद राहिलेल्या धावा घेतल्या जातात, पण तो डाव धरला जात नाही. उदाहरणार्थ, मागील मालिकेत ८ डावात २ वेळा नाबाद या प्रमाणे ३४८ धावा केल्यास त्या फलंदाजाची सरासरी धावसंख्या ३४८/६ = ५८ अशी येते, पण ८ डावात सर्व वेळा बाद ४०० धावा केलेल्या दुसऱ्या फलंदाजाची सरासरी धावसंख्या ४००/८ = ५० अशी येते. तरी आता सरासरी वापरून, की एकूण धावसंख्या बघून फलंदाजाची निवड करायची हे दोन निकष वेगवेगळी निवड सुचवितात. त्याचे दूरगामी परिणाम होतात.

गणिती संकल्पना, गृहीतके आणि प्रक्रिया इत्यादी वापरताना दक्ष राहणे अतिशय महत्त्वाचे आहे हे लक्षात आले असेल.

⌘⌘⌘

३८

गणितातील वादळे

अथांग सागरासारख्या पसरलेल्या गणिताचा विचार करता तसेच त्याची तर्कशुद्ध बैठक बघता, गणिताचा विकास एका चाकोरीबद्ध व्यवस्थेत झाला असेल, आणि होत राहील, अशी कल्पना सामान्यपणे होते. प्रत्यक्षात मात्र हा विकास अनेक लहान मोठ्या वादळांचा सामना करत झाल्याचे गणिताचा इतिहास सांगतो. त्यामुळे गणिती प्रवाह काही काळ कुंठित झाला, तर काही वेळा त्याच्या मूलभूत पायाला लक्षणीय धक्के देखील बसलेले आढळतात. त्यातील काही नमुनादाखल घटक व घटना आपण इथे बघुया.

वादळांची विविधता

१. अंकशास्त्र : नैसर्गिक अंक व त्यापासून विविध प्रकारच्या संख्या तयार करून त्यांचा वापर मोजणे आणि तुलना करणे यासाठी अनेक संस्कृतीत इसवी सन पूर्व ५००० वर्षांपासून व्यवस्थितपणे रुजला होता. भले ही त्यासाठी दशमान पद्धती, षष्ठमान पद्धती अथवा द्विदशमान पद्धती वापरली गेली असो. पूर्णांकाना पायथागोरसने स्थापलेल्या 'अंक' पंथात त्यामुळे दैवी पदावर बसवले होते. मात्र $\sqrt{२}$ अशी अपरिमेय संख्या पुढे आल्यावर त्या प्रतिमेला तडा गेला व त्या अर्थाने एक वादळच निर्माण झाले.

दुसरे अंकशास्त्रातील वादळ म्हणजे प्राचीन भारतीय गणितींनी मांडलेली 'शून्य' आणि 'ऋण'अंक व संख्या यांची संकल्पना. प्रत्यक्ष व्यवहारात त्यामुळे फारसा फरक पडला नव्हता, पण अशा अंकाच्या व्याप्तीना वाढवणाऱ्या बाबी गणिताच्या पायाला हादरा देत होत्या.

त्यानंतर अनुभवातीत (ट्राँसेन्डेटल) संख्या व संमिश्र (कॉम्प्लेक्स) संख्या यांनी अंकशास्त्राला नवीन अशी आव्हाने १८व्या आणि १९व्या शतकात

दिली. मात्र अशा संख्यांचा चपखल उपयोग अनेक गणिती व गणितावर आधारित प्रश्नांना सोडवण्यात झाल्यामुळे त्यांची दखल घेऊन त्यांना अंक शास्त्रात सामावून घ्यावे लागले.

२. भूमिती : ग्रीक गणितज्ञांसाठी भूमितीचा विकास हा एक मानाचा तुरा होता. युक्लिडने इसवी सन पूर्व ३०० मध्ये तिचा तर्कशास्त्रातील निगमन (डिडक्शन) पद्धतीचा सुरेख वापर करून उभारलेला डोलारा अतिशय शुद्ध असा आहे, व हीच पद्धत वापरून सर्व गणिताचा विकास केला जावा असा मतप्रवाह रुढ होण्याइतका तो समर्थ आहे असे मानले गेले.

तसे जवळपास २००० वर्षे सुरळितपणे चालू ही होते. तथापि १९व्या शतकाच्या मध्यात युक्लिडची भूमिती ही केवळ सपाट प्रतलासाठी योग्य आहे आणि युक्लिडच्या केवळ एका गृहीतकात बदल केल्यास अनंत प्रकारच्या भूमिती, अर्थातच वेगवेगळ्या पृष्ठभागासाठी, निर्माण करणे शक्य आहे असे सिद्ध करण्यात आले. हे एक फार मोठे वादळ होते व नवीन आणि विविध प्रकारच्या भूमितींना स्वीकारण्यास बराच काळ लागला. मात्र आइनस्टाइनने त्यांच्या सापेक्षतावाद सिद्धांतासाठी अशा नवीन भूमितीचा आधार घेतल्याने अशा युक्लिडेतर (नॉन-युक्लिडीयन) भूमितीची महिती प्रभावीपणे पटली.

३. कलन किंवा गणनशास्त्र (कॅलक्युलस) : अवकलन (डिफरनशियल) गणनशास्त्रासाठी शून्यलब्धी (इनफन्टेसिमल) ही संकल्पना वापरून न्यूटन आणि लायबनित्झ यांनी स्वतंत्रपणे विकसित केलेला हा गणिती विकास अनेक दशके वादाच्या भोवऱ्यात सापडलेला होता. सदर संकल्पना गणिताच्या काही मूलभूत बाबींना छेद देत असल्याचे पुढे येत असल्याने एक काहूर निर्माण झाले होते. तथापि या गणनशास्त्राचा उपयोग करून न्यूटनने मांडलेले सिद्धांत व नियम हे निसर्ग व अंतराळातील घटनांना अचूकपणे सांगत असल्यामुळे एक मोठा पेच गणिती वर्तुळात निर्माण झाला होता यात वाद नाही.

१९व्या शतकात सदर गणनशास्त्राला मर्यादा (लिमिट) या संकल्पनेत नवीन प्रकारे मांडून त्या पेचांवर मात करण्यात आली.

४. गणिती अनंत : संख्या कधी ही संपणाऱ्या नाहीत या कल्पनेला अगदी पहिल्यापासून लक्षात घेऊन गणिती अनंत ही एक अस्तित्व नसलेली प्रचंड मोठी संख्या असे मानले जात होते. मात्र कँटोर यांनी १९व्या शतकाच्या उत्तरार्धात गणिती संचाची (सेट) संकल्पना मांडून गणिती अनंताचे देखील अनेक प्रकार आहेत असे सिद्ध करून संपूर्ण गणिती जगात मोठी खळबळ

माजवली होती यात शंका नाही. अशा विविध गणिती अनंताना मांडण्याच्या संख्या त्यांनी तयार केल्या ज्याना सान्तातीत (ट्रान्सफाइनाइट) संख्या म्हणतात. अशा संख्यांचे गणित ही त्यांनी पुढे विकसित केले.

या संपूर्णपणे नवीन संकल्पना व विचारपद्धतीमुळे गणित जगतात मोठे वादळ उठले होते व आजवर त्यासंबंधी चर्चा होते हे विशेष.

५. गणिती परिपूर्णता : वर वर्णन केलेल्या काही मोठ्या तसेच काही प्रमाणात गणिताच्या विविध शाखात उद्‌भवलेली छोटी वादळे शमवण्यात गणितज्ञांना बहुतांशी यश मिळाले. त्यासाठी गणिताची चौकट रुंदावणे व नवीन सिद्धांत, प्रमेये आणि पद्धती तर्कसंगत राहतील असे बघणे, या प्रकारे मार्ग सामान्यपणे काढला गेला. यामुळे संपूर्ण गणिताला एक औपचारिक बैठकीत मांडता येईल अशी कल्पना डी. हिल्बर्ट या सुप्रसिद्ध गणिती प्रज्ञावंताने १९२८ मध्ये मांडली.

अशी गणिती बैठक किंवा चौकट परिपूर्ण (कम्प्लीट) असेल तसेच परस्परसंगती दाखवणारी (कन्झिस्टंट) असेल हे अर्थातच ओघाने आले. मात्र के. गोदेल यांनी १९३१ मध्ये तर्कशास्त्राधारे असे सिद्ध केले की अशी गणित चौकट एकतर परिपूर्ण असेल, किंवा परस्परसंगती दाखवणारी असेल. दोन्ही निकष पाळणारी अशी गणिती चौकट तयार करणे अशक्य आहे. या निष्कर्षामुळे गणितासाठी, मुख्यतः त्याच्या अशा औपचारिक पायाभूत संरचनेसाठी एक मोठा अडसर निर्माण झाला.

वादळांची सांगता

वर वर्णन केलेली गणितातील वादळे चहाच्या पेल्यातील वादळे अशा प्रकारची नव्हती. ती, काही गणितज्ञांच्या आपसातील मतांत किंवा विचारसरणीत फरक असणे, यामुळे निर्माण झालेली अशी ही नव्हती. प्रत्येक वादळाने त्या काळच्या प्रस्थापित गणिती संरचनेला मोठा धक्का दिला होता. मात्र गणितज्ञांनी अशा सर्व नवीन कल्पनांना तपासले, पारखले आणि काळाच्या ओघात गणितात सामावून घेतले. मुख्य गोष्ट म्हणजे गणिताच्या उपयोजनेत गणिताच्या पायाला संभ्रमात टाकणाऱ्या प्रश्नांची झळ सहसा लागून दिली नाही. त्याअर्थाने गणिताची विविध विषयांसाठीची उपयुक्तता कधीही कमी झाली नाही.

गणिती तत्त्वज्ञान अशी एक औपचारिक उपशाखा गणिताचा पाया आणखी भक्कम कसा करता येईल यासाठी विकसित झाली आहे. अनेक गणिती तर्कदोष (फॅलेसी) आणि विरोधाभास (पॅरॅडॉक्स) यांच्यावर समुचितपणे मात

करण्यासाठी विविध पद्धती निर्माण केल्या जात आहेत. एका प्रकारे अशा उद्भवलेल्या गणिती वादळांनी गणिताला सक्षम होण्यास मदतच केली आहे. असा सकारात्मक दृष्टिकोन असल्यामुळे भविष्यात येणाऱ्या गणिती वादळांना देखील गणित आणि गणितज्ञ योग्य रितीने हाताळतील असा विश्वास वाटतो.

⌘⌘⌘

३९

गणिती विचारमंथन

गणिती विचार पद्धती ही तर्कशास्त्राधारे उभारली जावी आणि वापरली जावी यावर सहसा भर दिला जातो. मात्र काही वेळा अशा चाकोरीबद्ध चौकटीबाहेर विचार करून गणिती प्रश्न सोडवण्याची अनेक उदाहरणेही उपलब्ध आहेत. अशा प्रकारे उत्तर काढल्यावर त्या पद्धतीला शक्यतो औपचारिक बैठकीत सामावून घेण्याचा प्रयत्न गणित करते, ज्यामुळे तशाच स्वरूपाचा पुढे उपस्थित होऊ शकणारा प्रश्न सोडवण्यास सोपे जावे. पण त्याचबरोबर काही प्रश्न हे मान्य व प्रचलित गणिती पद्धतीला बुचकळ्यात टाकू शकतात हे ही आढळून येते. या लेखात आपण या संदर्भात काही उदाहरणे बघुया व संगणक वापराची चर्चा करुया.

वैचारिक आव्हान

उदाहरण १ : अनेकदा २, ४, ६,... अशा मालिकेतील पुढील म्हणजे चौथी संख्या कोणती असेल असा प्रश्न विचारला जातो. बहुत करून '८' हे उत्तर चटकन दिले जाते. याचा तर्क असा असतो की या मालिकेतील प्रत्येक संख्या, फ (न) = २ × न, न ही नैसर्गिक संख्या आहे, या फल नियमाने तयार होत आहे. म्हणून फ (४) = २ × ४ = ८.

तथापि वरील उत्तर '१०' ही असू शकते आणि ते देखील बरोबर असू शकते, जर आपण खालील फल नियमाचा उपयोग केला असेल :

$$\text{ग (न)} = (१/३) \times \text{न}^{३} - २ \times \text{न}^{२} + (१७/३) \times \text{न} - २.$$

इथे, $\text{ग (१)} = (१/३) \times १^{३} - २ \times १^{२} + (१७/३) \times १ - २ = २,$

$$ग\,(२) = (१/३) \times २^{३} - २ \times २^{२} + (१७/३) \times २ - २ = ४,$$

आणि $$ग\,(३) = (१/३) \times ३^{३} - २ \times ३^{२} + (१७/३) \times ३ - २ = ६$$

असे उत्तर मिळत असल्यामुळे

$$ग\,(४) = (१/३) \times ४^{३} - २ \times ४^{२} + (१७/३) \times ४ - २ = १०$$

ही वरील मालिकेतील पुढील संख्या असेल, असे समोर येते.

एवढेच नव्हे तर या मालिकेतील चौथी संख्या '१३' असेल, जर आपण पुढील नवीन फल नियमचा वापर केला असेल :

$$ह\,(न) = (५/६) \times न^{३} - ५ \times न^{२} + (६७/६) \times न - ५.$$

कारण ह (१) = २, ह (२) = ४, ह (३) = ६ असे असल्याने, ह (४) = १३ हे उत्तर मान्य करावे लागते. यावरून लक्षात येईल की असे अनंत प्रकारचे फल नियम तयार करणे शक्य आहे, ज्यामुळे पहिल्या तीन संख्या २, ४ आणि ६ असतील, पण चौथी संख्या एकदम वेगळी वाटणारी मिळेल.

अशा परिस्थितीत 'ओकॅमची पद्धत' वापरण्याचा प्रघात आहे. विल्यम ओकॅम (१२८०-१३४९) हा एक इंग्लिश तत्वज्ञ आणि धर्मगुरू होऊन गेला. त्याची एक उक्ती 'ओकॅमचा वस्तरा' म्हणून प्रसिद्ध आहे. त्याचा सारांश असा आहेः गरज नसेल तर वस्तूंची संख्या वाढवू नये. या मार्गदर्शन तत्वानुसार सर्वात कमी क्लिष्ट असा गणिती फल नियम सर्व उपलब्ध नियमातून निवडावा असे अभिप्रेत आहे. म्हणूनच पहिले काढलेले '८' हे उत्तर मान्य केले जाते. गणिती सुरेखपणा हा पण एक महत्त्वाचा पैलू असून त्याआधारे निर्णय घ्यावा असे प्रतिपादीत केले गेले आहे. अर्थातच या संपूर्ण विचारसरणीवर वेगवेगळी मते आहेत. गणिताच्या तत्वज्ञानाला हे एक आव्हानच आहे.

उदाहरण २ : १ या नैसर्गिक संख्येचा वर्ग करून त्यात त्यापुढील प्रत्येक नैसर्गिक संख्येचा वर्ग जमा करणे, अशी प्रक्रिया करून मिळालेले उत्तर एखाद्या नैसर्गिक संख्येचा वर्ग असेल का? आपण हे नमुना दाखल करून बघूया :

$$१^{२} + २^{२} = ५$$

$$१^{२} + २^{२} + ३^{२} = १४$$

$$१^{२} + २^{२} + ३^{२} + ४^{२} = ३०$$

$$१^{२} + २^{२} + ३^{२} + ४^{२} + ५^{२} = ५५$$

वरील प्रक्रिया दाखवते की अशा बेरेजेने प्राप्त झालेली आत्तापर्यंतची कुठलीही संख्या ही नैसर्गिक संख्येचा वर्ग नाही आहे. मात्र आपण चिकाटी ठेवली आणि वरील प्रक्रिया पुढे करत गेलो तर खालील उत्तर मिळते :

$$१^2 + २^2 + ३^2 + ... + २३^2 + २४^2 = ४९०० = ७०^2.$$

तर आपल्या प्रश्नाचे उत्तर होय असे मिळाले आहे. आता प्रश्न असा येतो की आपण ही प्रक्रिया अशीच चालू ठेवली तर आपल्याला पुढे प्राप्त होणारी कुठली तरी बेरीज एखाद्या नैसर्गिक संख्येचा वर्ग असेल का ? अर्थातच संगणकाचा वापर अशा आगामी जिकरीच्या आकडेमोडीसाठी करणे रास्त ठरेल. त्याचा उपयोग अवश्य करावा.

मुद्दा असा आहे की आपण समजा ५०,००० या संख्येपर्यंत ही प्रक्रिया तपासली, आणि तोवर मिळालेली बेरीज कुठल्याही नैसर्गिक संख्येचा वर्ग नाही असे आढळले तर आपण असा निष्कर्ष काढू शकू का की $१^2 + २^2 + ... + २४^2$, हे सोडल्यास आपल्याला सदर प्रक्रियेद्वारा मिळणारी कुठलीही बेरीज ही नैसर्गिक संख्येचा वर्ग नसेल ?

स्वाभाविकपणे आक्षेप घेतला जाईल की ५०,००० च्या पुढे असे घडू शकते. असे किती वेळ किंवा संख्येपर्यंत करत जायचे याला तात्विकदृष्ट्या मर्यादा नाही, पण प्रत्यक्षात असे करत राहाणे शक्य नाही हे देखील स्पष्ट आहे. तर मग आपल्याला काही गणिती सिद्धता देता येईल का ? अन्यथा या प्रश्नाला एक गणिती अटकळ या स्वरूपात सामिल करायचे असा निर्णय घ्यावा लागेल (अधिक माहितीसाठी प्रकरण २९ पहा).

उदाहरण ३ : दैनदिन व्यवहारात तापमान मोजण्यासाठी सेल्सियस किंवा सेंटिग्रेड् (स) आणि फॅरेनहाइट (फ) अशा दोन प्रणाली वापरल्या जातात. एका प्रणालीमधील तापमान दुसऱ्या प्रणालीत दर्शवण्यासाठी खालील गणिती सूत्राचा वापर केला जातो :

$$स = (५/९) \times (फ - ३२).$$

या सूत्रात फ चे मूल्य ५२७ ठेवल्यास प्राप्त होणारे स चे मूल्य २७५ असे आहे. या दोन संख्याचे निरीक्षण केल्यास असे आढळते की दोन्हीमध्ये वापरले अंक (२, ५, ७) तेच आहेत, फक्त त्यांचा क्रम वेगळा आहे.

प्रश्न असा आहे की वरील सूत्राचा वापर करून अशा प्रकारच्या अंक अदला-बदली झालेल्या नैसर्गिक संख्यांच्या इतर जोड्या कुठल्या आहेत, त्या

किती आहेत? सोयीसाठी ऋण उत्तराचे चिन्ह आपण विचारात घेणार नाही, व तशा जोड्या वैध मानू. सदर आकडेमोडीसाठीदेखील संगणकाचा वापर उपयोगी ठरेल.

वरील तीन उदाहरणे गणिती विचाराला चालना देणारी आहेत यात शंका नाही. आणि अशी अनेक उदाहरणे देता येतील. गणिती संशोधन अशा मार्गाने सुरू होऊ शकते, पुढे जाऊ शकते.

संगणक व गणित

एका महत्त्वाची बाब म्हणजे संगणकाचा वापर गणिताच्या अशा मूलभूत प्रकारच्या संशोधनासाठी करणे नितांत गरजेचे आहे हे स्पष्ट होते. अनेक गणितज्ञांना संगणकाचा वापर गणितातील सिद्धता देण्यासाठी वापरणे गैर किंवा कमीपणाचे वाटते, गणित अशुद्ध झाल्यासारखे जाणवते. हे मनाचे खेळ आहेत. संगणकाची आकडेमोडीची प्रचंड क्षमता, अचूकता आणि आवाका यांचा लाभ न घेणे याचे समर्थन याआधारे करणे योग्य ठरणार नाही. कागद, पेन्सिल, मोजपट्टी याचप्रमाणे संगणक हे गणिती साधन म्हणून बघावे. संगणक तुमचे श्रेय हिरावणार नाही कारण त्याला तुम्ही काय उपलब्ध केले आहे याची जाण किंवा औचित्य नसते. तरी अशा उपलब्ध साधनाचा उपयोग गणिती विचारमंथनासाठी सर्वोपरी करणे योग्य ठरेल.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

⌘⌘⌘

४०

गणित प्रतिसादाचे

न्यूटनने मांडलेल्या गतीच्या तिसऱ्या नियमानुसार भौतिक जगातील प्रत्येक क्रियेची समान अशी प्रतिक्रिया निर्माण होते. व्यवहारात अशा प्रतिक्रियेची तीव्रता आणि सकारात्मक किंवा नकारात्मक दिशा लक्षात घेऊन आपल्या क्रियेचे पुढचे चक्र सुरू करता येते. उदाहरणार्थ, आपण कोणा व्यक्तीशी संभाषण करताना एखादे वाक्य उच्चारतो. ते प्रिय वाटल्यास सहसा स्मित हास्य आणि आभार मानणारी प्रतिसादाची वाक्ये ती व्यक्ती उत्साहाने आपल्याला देते, तर अप्रिय वाटल्यास तक्रार किंवा रागाच्या सुरात व आवेषाने कदाचित स्पष्टीकरण देणारी वाक्ये तिच्याकडून आपल्याला मिळतात, तर काही वेळा आपल्याला बुचकळ्यात टाकणारा असा निर्विकार चेहरा आणि शब्दहीन प्रतिसाद मिळू शकतो. असे मानवी प्रतिसाद हाताळण्याचे ज्ञान व कसब आपल्याला बहुधा उपजतपणे मिळालेले असते, किंवा काही प्रमाणात अभ्यासाने मिळवता येते.

गणिती चौकट

या साद-प्रतिसादाचे नेमके गणित मांडण्याचा प्रयत्न आपण सहसा करत नाही. मात्र तंत्रज्ञानावर आधारित उपकरणे व यंत्रे आपल्या दैनिक आयुष्यासाठी तसेच उपजिवीका, आर्थिक प्रक्रिया, प्रवास, सुरक्षा आदीसाठी आवश्यक होऊ लागली असल्यामुळे अशा मानवनिर्मित अचेतन साधनांचे प्रत्याभरण (फीडबॅक) किंवा प्रतिसाद प्राप्त करणे, समजणे आणि त्यानुसार आपल्या काही क्रिया बदलणे आणि यंत्राला सुधारित आज्ञा देणे याची गरज भासू लागली. त्याच्या पुढची पायरी म्हणजे यंत्राने, त्याने केलेल्या क्रियेचा प्राप्त प्रतिसाद, जसा की सभोवतालच्या वातावरणाकडून त्याने स्वत: विश्लेषण करून त्याच्या

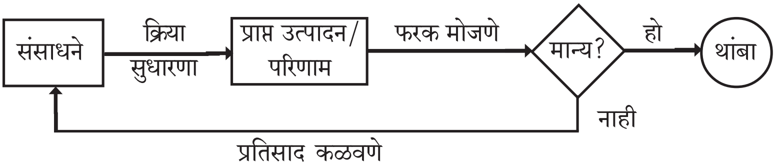
क्रियांमध्ये आपोआप बदल करणे हे होय. उदाहरणार्थ, हवा वातनुकूल करणाऱ्या यंत्राने एका ठरवलेल्या तापमानापेक्षा खोलीतील तापमान वर गेल्यास शीतलता प्रदान करण्याची क्रिया सुरू करायची व सभोवतालचे तापमान त्यापेक्षा कमी झाल्यावर ती क्रिया बंद करायची आणि परत त्या विशिष्ट पातळीपेक्षा तापमान वाढल्यावर सुरू करायची. असे आपोआप आणि वारंवार करण्यासाठी अर्थातच यंत्राला प्रतिसाद समजण्यासाठी आधार लागतो आणि तो पुरवण्याचे काम गणिताधारित तंत्रज्ञान करते.

एन. वाइनर (१८९४–१९६४) या अतिशय प्रज्ञावान अमेरिकन गणितज्ञाने १९४० च्या दशकात या प्रतिसादाच्या गणिताची व्यवस्थित मांडणी करून *सायबरनेटिक्स* अशी एक शाखा विकसित केली. तिचा उपयोग नियंत्रण सिद्धांत, सयंत्रणा व्यवस्थापन, अर्थशास्त्र अशा अनेक विषयांत तसेच विविध यांत्रिक प्रणाली सुचारू पद्धतीने चालवण्यासाठी व्यापकपणे आता केला जातो.

एका अर्थाने अशी प्रतिसाद व्यवस्था प्राप्त आणि अपेक्षित परिणाम यातील फरक किमान असावा याप्रमाणे काम करणारी असते. अर्थातच शून्य फरक हा त्यासाठी आदर्श असतो. या संदर्भात स्वाभाविकपणे घडलेली प्रतिक्रिया किंवा प्रतिसाद आणि काही उद्देशाने दिलेला प्रतिसाद यातील भेद लक्षात घेतला पाहिजे. उदाहरणार्थ, पावसामुळे डोंगरावरील एक दगड निखळून खाली गडगडत येतो आणि एका विंचूवर आदळतो ज्यामुळे त्याचा जीव जातो. हे स्वाभाविकपणे, सहजपणे घडलेले असते, तर विंचू दिसल्यावर माणसाने त्याचा नाश करण्यासाठी दगड मारणे हा त्या उद्देशाने दिलेला प्रतिसाद असतो. मात्र सचेतन प्राणीच असे उद्देश ठेऊन प्रतिसाद देतात असे नव्हे, जसे की वर वर्णन केलेले वातानुकूलतेचे यंत्र किंवा अचूकपणे प्रत्येक मजल्याच्या पातळीवर थांबत जाणारे उंच इमारतीमधील उच्चालन यंत्र (लिफ्ट) किंवा प्रगत विमानामधील स्वयंचलित पायलट यंत्रणा. तर याबाबतीत नियंत्रणासाठी गणित कसे उपयोगी पडते ते बघुया.

गणिती प्रतिकृती

आपण एक साध्या व्यवस्थेला आकृती १ मध्ये मांडल्याप्रमाणे विचारात घेऊ. इथे संसाधनावर प्रथम क्रिया करून उत्पादन किंवा परिणाम प्राप्त करणे, अपेक्षित परिणाम व प्राप्त परिणाम यातील फरक मोजणे, तो अमान्य असल्यास त्यानुसार संसाधनात बदल करणे किंवा क्रिया सुधारणे व नवीन परिणाम प्राप्त करणे, याप्रकारे वारंवार प्रतिसादावर आधारित काम करणारी व्यवस्था दाखवली आहे.



आकृती १

इथे आपण खालील संज्ञा वापरूया :

स = संसाधने, प = उत्पादन, तरी फरक (फ) हा फ = स - प असा असेल. जर उत्पादन हे फरकाशी क गुणांकाने जोडले असे मानले (म्हणजे प = क X फ, क ही धन वास्तव संख्या आहे), तर

$$(प/क) = स - प$$

तरी,
$$प = \frac{क}{१ + क} X \; स.$$

उदाहरणार्थ, क = ३ असल्यास प = (३/४) स, म्हणजे उत्पादन हे संसाधनाच्या ७५ टक्के (सहसा मूल्याच्या) असा अर्थ मिळतो. तरी अधिक उत्पादनासाठी क चे मूल्य वाढवणे भाग आहे. क ही ऋण संख्या असेल तर त्याचा वेगळा अर्थ काढावा लागतो.

अशी साद-प्रतिसादाची गणिती प्रक्रिया व्यवहारी जगात विविध प्रकारे घडत असते. काही प्रमाणात ती बाजारात समतोल प्रस्थापित करण्याचे काम करते. त्यासंबंधी एक साधे उदाहरण घेऊ या.

बाजार संतुलन

उदाहरण : एका विशिष्ट प्रकारच्या तयार शर्टाची सामान्यपणे नफा धरून किंमत रु. ७५० असली पाहिजे. मात्र सध्या तो एकच उत्पादक तयार करत असल्यामुळे असा शर्ट प्रति नग रु. १२०० ला विकला जात आहे. त्यात भरीव नफा (फरक) आहे हे समजल्यावर अन्य उत्पादक त्याचप्रकारचे शर्ट उत्पादन करून बाजारात आणतात. आता स्पर्धेमुळे त्या शर्टाची किंमत घसरून रु. ५०० प्रति शर्ट म्हणजे रु. (५०० - ७५०) = (-२५०) रुपये असा असमाधानकारक परतावा देणारी परिस्थिती निर्माण होते. तरी अनेक उत्पादक त्या विशिष्ट शर्टाचे उत्पादन बंद करतात व नवीन उत्पादनाकडे वळतात. सहाजिकच स्पर्धा कमी होते व मागणी कायम राहिल्यास त्या शर्टाची किंमत अपेक्षित रु. ७५० प्रति शर्ट याच्या जवळपास स्थिर होते.

बाजारातील एकाधिकार व इतर परिस्थितींचा अभ्यास अशा प्रतिसादाच्या गणिती अभ्यासामुळे सखोलपणे करणे शक्य झाले आहे. *आर्थिक सायबरनेटिक्स* अशा नावाचा एक उप-विषय त्यामुळे विकसित झाला असून त्यासंबंधी मुबलक साहित्य उपलब्ध आहे. या विषयात प्रामुख्याने पूर्वी साम्यवादी राजवट असलेल्या युरोपमधील देश जसे की, रोमानिया, हंगेरी व पोलंडमध्ये मोठ्या प्रमाणात काम झालेले आढळते.

विविध आव्हाने

वरील उदाहरणांवरून लक्षात येते की प्रतिसाद हा अनेक वेळा दोलायमान असतो व प्रत्यक्षात गतिमान पद्धतीने बदलत राहातो. आपली झोप आणि स्वास्थ्य अशा गतिमान प्रतिसाद पद्धतीने एकमेकांशी जोडलेले आहेत. घसा बिघडणे व सर्दीने नाक चोंदणे यामुळे झोप घेणे कठीण होते. कमी झोप किंवा आराम यामुळे सर्दी-पडसे आणखी तीव्र होते व त्यामुळे झोप घेणे अधिक कठीण होते. काही औषधे, गुळण्या इत्यादी करून या साद-प्रतिसादाचे चक्र मार्गावर आणावे लागते. तथापि अशा प्रकारच्या व्यवस्थांचे गणित मांडणे कठीण असते व फारच कृत्रिम वाटू शकते. पण तसे केल्यास अनेक महत्त्वांच्या व्यवस्थाबाबतीत योग्य मार्गदर्शन मिळते असा अनुभव आहे.

काही परिस्थितीत प्रतिसाद हा कळवला जात असताना तो वातावरणातील अनेक घटकांमुळे दूषित होऊन मूळपेक्षा बराच परिवर्तित झालेला मिळू शकतो. यात्रिंक संदेश देव-घेव प्रणाली, जहाज व विमानांना मार्गदर्शन करणारी व्यवस्था आणि उपग्रह कार्ययंत्रणा यांना अशा परिवर्तित प्रतिसादांचा सामना करावा लागतो. तरी तो बदल कसा असू शकतो व त्याचा प्रभाव कसा दूर करायचा यासाठी संख्याशास्त्र आणि बीजगणित यामधील प्रगत संकल्पना व पद्धतींचा वापर केला जातो. चंद्र, मंगळ आदी आपल्या सौर मालिकेतील गोलांवर आपण उतरवलेली याने आणि तिथे शोध घेणारी यंत्रे व साधने प्रतिसादाच्या गणिताचा पदोपदी उपयोग करून सर्व तांत्रिकी आणि अभियांत्रिकी कामे पार पाडतात. यावरून प्रतिसादाच्या गणितात झालेला विकास, त्याची उपयोजन क्षमता आणि मोठ्या प्रमाणात होणारा फलदायी वापर याची कल्पना मिळते.

⌘⌘⌘

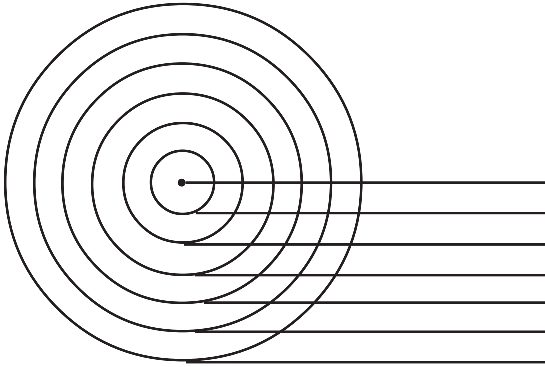
४१

नित्य विचारक्षेत्राचे गणित

या भूतलावरील सर्व सचेतन वस्तुंमध्ये मानवाच्या विचारशक्तीची झेप सर्वात व्यापक आणि प्रगल्भ आहे यात वाद नाही. यामुळे तो अनुभवांचा आधार घेऊन स्वतःचे असे जगाबाबतचे चित्र व वागण्याचे नियम निर्माण करतो व बहुतेक सर्व व्यवहारात त्यांचे मार्गदर्शन घेतो. दुसऱ्या अर्थाने पाहिल्यास तो स्वतःची एक ओळख निर्माण करतो आणि त्याप्रमाणे समविचारी किंवा समान हितसंबंध व कळकळ असणाऱ्या लोकांशी जवळीक, तर वैचारिक किंवा इतर प्रकारचा मतभेद असलेल्या लोकांपासून दूर राहाण्याचा मार्ग सहसा पत्करतो. म्हणजेच मनुष्याच्या ओळखीचे वर्तुळ हे त्याच्या विचारक्षेत्राचे व्यक्ती, वस्तु, घटना याबाबतचे प्रतिबिंब व्यक्त करणारे असते आणि तत्वतः ते काळ आणि स्थान याप्रमाणे लहान-मोठे होऊ शकते, बदलू शकते. मात्र काळाच्या ओघात ते बहुतांश एक स्थिर रूप धारण करते, ज्याला *नित्य विचारक्षेत्र (हॅबिच्यूअल डोमेन)* असे म्हटले जाते.

साधारण संबंधक्षेत्र

सहसा आढळणारे मानवी ओळख दाखवणारे व त्यानुसार नित्य विचारक्षेत्राची कल्पना देणारे घटक आकृती १ दाखवते. अर्थातच स्व हा त्या वर्तुळाचा केन्द्र असतो. त्यानंतर वाढत जाणारे वर्तुळ व्यक्तीचे कुटुंब, जिवलग मित्रमंडळी, सहकारी, शेजारी, राज्य व देशवासी याच्यांशी कमी होत जाणारी जवळीक दाखवत जाते. सर्वात शेवटी इतर सर्व सचेतन वस्तू अगदी कमी ओळखीच्या अशा सदर वर्तुळाचा भाग सहसा असतात.



आकृती १

गणिती मांडणी

अशा नित्य विचारक्षेत्राचे आणि विशेषकरून मानवी जवळीकीच्या उतरंडीचे गणित मांडून त्याचा वापर अनेक प्रकारे करणे शक्य आहे, हे या लेखात सादर केले आहे.

वर सांगितल्याप्रमाणे पटणाऱ्या व्यक्तींशी जवळीक, तर न पटणाऱ्या व्यक्तीपासून दूर राहाणे असे मनुष्य सहसा करतो. गणिती भाषेत, प आणि फ या दोन व्यक्तीमधील (वैचारिक) जवळीकीचे अंतर ड(प,फ) हे दिलेल्या क्षणी व परिस्थितीत [–१, १] या अंतराळामध्ये व्यक्त करता येईल.

० < ड (प, फ) ≤ १ म्हणजे प ही व्यक्ती फ शी जवळीक साधणे उपयुक्त मानते. ड(प, फ) या फलाचे मूल्य १ असेल तर प आणि फ यांच्यात पूर्णपणे सामंजस्य आहे असा अर्थ अभिप्रेत आहे.

– १ ≤ ड (प, फ) < ० म्हणजे प ही व्यक्ती फ ला जवळची मानत नसून दूर ठेवणे पसंत करते. –१ म्हणजे पूर्णपणे नापसंती असा अर्थ आहे.

ड (प, फ) = ० म्हणजे प ही व्यक्ती फ च्या जवळ जाणे किंवा तिला दूर ठेवणे या दोन्ही बाबतीत उदासीन आहे. ड (प, फ) चे मूल्य – १ ते १ या अंतराळातील कुठलीही परिमेय संख्या असू शकते.

याप्रकारे प्रत्येक व्यक्तीचे अन्य प्रत्येक व्यक्तीशी संबंध ठेवणे किंवा जवळीक ठेवणे किंवा कसे, हे विविध श्रेणीत सदर फलनियमांनी मांडले जाऊ शकते. प्रत्यक्षात जवळीक मानणे ह्यासाठी ड फलनियमाचे काही उंबरठा मूल्य

(थ्रेशोल्ड व्हॅल्यू) मानले जाऊ शकते उदाहरणार्थ, ड चे मूल्य ०.४ पेक्षा अधिक असेल तर जवळीक मानावी. त्याचप्रमाणे ड चे मूल्य –०.३ पेक्षा कमी असेल तर विरोध मानावा.

बोलके उदाहरण

या प्राथमिक गणिती संकल्पनांचा उपयोग समूहाने एका व्यक्तीची निवड सर्वानुमते करण्यासाठी केला जाऊ शकतो. मुख्य फायदा म्हणजे असे विविध प्रकारे करणे शक्य आहे. या संदर्भात तक्ता १ विचारात घेऊया. तिथे प१, प२, ... प१० अशा दहा व्यक्ती असून फ१, फ२ आणि फ३ या तीन उमेदवारांपैकी एकाची त्यांना निवड करायची आहे. तक्ता १ मधील प्रत्येक ओळ फ१, फ२ आणि फ३ कितपत पसंत आहे किंवा नापसंत आहे, ते डच्या मूल्यात दाखवते. उदाहरणार्थ, प४ ची फ१ ला पसंती २०% (०.२), फ२ ला १००% (१) आणि फ३ ला नापसंती ६०% (–०.६) असे प४ ची ओळ दाखवते.

तक्ता १

ड (प, फ)	**फ१**	**फ२**	**फ३**	**कमाल ड (प, फ) मूल्यानुसार निवड**
प१	०.२	१	०.१	फ२
प२	०.३	१	०.३	फ२
प३	०.२	१	०.३	फ२
प४	०.२	१	–०.६	फ२
प५	०.३	१	०.२	फ२
प६	०.८	–१	०.६	फ१
प७	१	–१	०.५	फ१
प८	०.८	–१	०.५	फ१
प९	०.५	०.२	०.६	फ३
प१०	०.२	०.५	०.६	फ३
एकूण ड (प, फ)	**४.५**	**२.७**	**३.१**	

तक्ता १ मधील शेवटचा स्तंभ सर्वाधिक मतानुसार निवड : फ२ (५ मते) फ१ (३ मते) आणि फ३ (२ मते) या क्रमाने आहे असा एक निष्कर्ष देतो. ही पद्धत आपण बहुधा आपल्या सर्वप्रकारच्या सार्वजनिक निवडणुकांत वापरतो, ज्यामध्ये कमाल मते मिळवणारा उमेदवार विजयी मानला जातो. मात्र सहसा नापसंती व्यक्त करण्याचा पर्याय लोकांना उपलब्ध नसतो.

तक्ता १ मधील सर्वात खालची ओळ त्या १० लोकांची पसंती व नापसंती दोन्ही लक्षात घेऊन निवड पसंतीचा वेगळाच असा क्रमः फ१ (४.५), फ३ (३.१) आणि फ२ (२.७) दाखवते. विशेष म्हणजे पहिल्या पद्धतीप्रमाणे विजयी ठरलेला उमेदवार फ२ हा या पद्धतीने शेवटच्या क्रमावर फेकला गेला आहे. याला मुख्य कारण म्हणजे प६, प७ आणि प८ यांची फ२ला १०० टक्के नापसंती आहे, जी −१ या मूल्याने तक्ता १ मध्ये त्यांच्या ओळीत स्तंभ ३ मध्ये दाखवली आहे.

अशी पर्यायी निवड पद्धती अनेक वेळा शरीर सौष्ठव स्पर्धा आणि सौंदर्य स्पर्धांसाठी वापरली जाते, ज्यामध्ये स्पर्धकाचे नांव व इतर ओळख परिक्षकांना सांगितली जात नाही व त्यांची ओळख अक्षर किंवा संख्यानी दिली जाते. या पद्धतीमुळे उमेदवार किंवा स्पर्धकाला लोकांची अधिकाधिक पसंती मिळवणे व त्यासोबत नापसंती कमी करणे असे वागावे लागते, म्हणजे सर्व लोकांच्या मतांचा विचार करावा लागतो आणि न की काही विशिष्ट समूहांचा (व्होट बँक). तसेच या पद्धतीमुळे पसंतीच्या उमेदवारांपैकी सर्वात पसंत उमदेवार, किंवा नापसंत उमेदवारांपैकी सर्वात कमी नापसंत उमेदवाराची निवड केली जाते. अशा ऋण पसंतीने निवडलेल्या उमेदवाराला अधिक लोकांचा विश्वास व पाठींबा मिळवण्यासाठी सर्वांसाठी हितकर अशी कामे सातत्याने करावी लागतील असा संदेश असतो.

काही वेळा निवडीसाठी पसंती तसेच नापसंतीचे उंबरठा मूल्य ठरवले जाऊ शकते. उदाहरणार्थ, पसंतीसाठी उंबरठा मूल्य ०.६ किंवा त्याहून अधिक असले पाहिजे असे मानल्यास तक्ता १ मधील प१, प२, ..., प१० यांची पसंती कोणास आहे हे शोधता येईल व त्यामधील कुठला उमेदवार सर्वांच्या पसंतीस उतरतो हे सांगता येईल. दुर्दैवाने पसंतीचे उंबरठा मूल्य ०.६ असल्यास, फ१, फ२ आणि फ३ पैकी कुठलाही उमेदवार सर्वांच्या पसंतीस उतरत नाही असे उत्तर मिळते. पसंतीचे उंबरठा मूल्य ०.२ इतके कमी केल्यास फ१ हा उमेदवार सर्वांच्या यादीत आहे असे दिसते.

उपयोगिता विस्तार

अशा प्रकारची पद्धत नवीन उत्पादन कसे असावे यासाठी मार्गदर्शक ठरू शकते. यासाठी निवडक लोकांना उत्पादनाचे कुठले घटक कितपत पसंत किंवा नापसंत आहेत हे तक्ता १ च्या स्वरूपात मांडून त्या घटकांची पसंती व नापसंतीची क्रमवारी मिळवता येते. त्यानुसार उत्पादनात पसंतीचे घटक असणे व नापसंतीचे घटक टाळणे असे करता येते.

वर चर्चा केलेल्या नित्य विचारक्षेत्राच्या गणिती पद्धती व प्रतिकृतींचा बराच विस्तार झाला आहे. त्यांची सरळरेषीय (लिनिअर) आणि गणिती (मॅथमेटीकल) प्रायोजनाशी (प्रोग्रामिंगशी) जोडणी केली गेली असून विविध परिस्थितीत निर्णय घेण्यासाठी त्याचा वापर केला जात आहे. सदर गणिती पद्धती संगणक वापरासाठी अनुरूप असल्यामुळे मोठ्या आकाराचे प्रश्न सोडवणे सुलभ आहे. या उप-विषयाला वाहिलेले *जर्नल ऑफ हॅबिच्युअल डोमेनस्* असे संशोधन नियतकालिक आता प्रसिद्ध होत आहे. सदर विषयाचे महत्त्व त्यावरून लक्षात येईल.

काही नवीन घडवण्यासाठी नित्य विचारक्षेत्राच्या बाहेर म्हणजे चाकोरीबद्ध विचार न करता नवा बदल किंवा फेरफार करण्याचा सल्ला बहुधा दिला जातो. त्यात बरेचसे तथ्य देखील आहे, पण वर मांडलेले नित्य विचारक्षेत्राचे गणित नूतन मतप्रवाह निर्माण करणे शक्य आहे असे दाखवते. तरी विद्यार्थी, शिक्षक, संशोधक आणि व्यवस्थापकांनी नेहमीचे विचार किंवा संकल्पना यांचा कल्पकतेने उपयोग करणे हे नवीन कल्पना साकार करणे इतकेच महत्त्वाचे आहे हे लक्षात घ्यावे.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

ꕤꕤꕤ

४२

सुस्थिर जुळणीची यशोगाथा
(अर्थविज्ञानातील नोबेल पारितोषिक २०१२)

द रॉयल स्वीडीश ॲकेडमी ऑफ सायन्सेस जेव्हा दरवर्षी अर्थ विज्ञानासाठी नोबेल पारितोषिक विजेत्यांची नावे घोषित करणार असते तेव्हा अर्थशास्त्र आणि गणित विज्ञानातील मंडळी उत्सुक झालेली असतात. गणिती लोक रस घेण्याची अनेक कारणे आहेत. एक म्हणजे गणितविज्ञानासाठी स्वतंत्र असे नोबेल परितोषिक दिले जात नाही, पण अर्थशास्त्र व गणित यांचा संबंध इतका घनिष्ठ झाला आहे की मॅथमेटिकल इकॉनॉमिक्स, इकॉनॉमेट्रिक्स व गेम थेयरी (खेळ सिद्धांत किंवा द्यूत सिद्धांत) हे गणिती संकल्पना व पद्धतीनी ओतप्रोत विषय अर्थशास्त्राचा महत्त्वाचा भाग झाले आहेत. यामुळे अर्थविज्ञानातील मागे प्रदान केलेली कित्येक नोबेल पारितोषिके गणिती योगदानासाठी प्रामुख्याने दिली गेल्याचे मानले जाते. गणितासाठी इंटरनॅशनल मॅथमेटिक्स युनियनतर्फे दर चार वर्षांनो देण्यात येणारे 'फील्ड्स मेडल' हे नोबेल पारितोषिकाच्या तोडीचे मानले जाते, मात्र त्याचे निकष आणि पुरस्कार प्रदान पद्धत फारच वेगळी आहे. व्यावहारिक पातळीवर बघता फील्डस पदकासोबत देणारी पारितोषिकाची रक्कम नोबेल पारितोषिकाच्या रक्कमेच्या तुलनेत अल्प आहे.

या सर्व गोष्टींची उजळणी करण्याचे कारण म्हणजे २०१२ साठी निवडले गेलेले अर्थविज्ञानातील नोबेल पारितोषिक विजेते आणि त्यांचे त्यासाठीचे कार्य. ते संयुक्तविजेते आहेत : लॉइड एस. शॅपले आणि अल्विन इ. रोथ. ते दोघे अमेरिकेचे नागरिक आहेत. शॅपले यांचा जन्म १९२३ सालचा असून ते

आता कॅलिफोर्निया विद्यापीठ, लॉस एंजिल्स, अमेरिका येथे मानद प्राध्यापक आहेत. तर रोथ यांचा जन्म १९५१ चा असून ते सध्या अमेरिकेतील हावर्ड विद्यापीठ आणि हावर्ड बिझनेस स्कूलमध्ये अर्थशास्त्र व धंदा-प्रशासन या विषयांचे प्राध्यापक आहेत.

नोबेल पारितोषिक निवड पद्धती

तसे पाहता या दोघा प्राध्यापकांमध्ये थेट काहीही संबंध नाही, पण त्यांना संयुक्तपणे हे पारितोषिक देण्याचे मुख्य कारण म्हणजे ज्या विशिष्ट कार्यासाठी त्यांची निवड करण्यात आली त्याची संकल्पना व पाया १९६० च्या दशकात शॅपले यांनी रचला आणि वीस वर्षांनी म्हणजे १९८० च्या दशकापासून रोथ यांनी त्या तात्विक कामाचा वापर अनेक क्षेत्रात कल्पकतेने उपयोजन करून योगदान केले आहे. नोबेल पारितोषिकाच्या निवडीची काही खास वैशिष्ट्ये आहेत. त्यातील एक म्हणजे ते एका विशिष्ट कामासाठी दिले जाते आणि न की एकूण विषयातील योगदानासाठी. दुसरे म्हणजे निवडलेले कार्य तावून-सुलाखून निघालेले असले पाहिजे, म्हणजे त्याचा सर्वांगीण अभ्यास झाला असून ते दोषरहित आहे असे निवड करताना निदर्शनास आले पाहिजे. तिसरे म्हणजे शक्यतो ते कार्य वास्तवात वापरले गेले असले पाहिजे व त्याची व्यापक उपयुक्तता दिसली पाहिजे. या निकषांवर आधारित निवड प्रक्रियेचे अर्थातच फायदे व तोटे आहेत. दोषमुक्त आणि एकूण समाजाला उपयोगी पडेल अशा कामाची निवड होणे हा मुख्य फायदा आहे. तर असे निर्विवादपणे सिद्ध होण्यास अनेक दशकांचा काळ जातो आणि पारितोषिक प्राप्त करते वेळी विजेता शारीरिक व मानसिकदृष्ट्या सहसा कार्यक्षम राहिलेला नसतो, हा प्रमुख तोटा आहे. म्हणजेच, विजेता हुरूप येऊन आणखीन कसदार योगदान करेल, असे काही अपवाद सोडता, बहुधा घडत नाही.

२०१२ च्या अर्थविज्ञानासाठीच्या नोबेल पारितोषिकाची निवड प्रक्रिया सदर वैशिष्ट्ये दाखवते. ज्या मूळ कार्यासाठी पारितोषिक जाहिर झाले आहे ते पाच दशकांपूर्वी शॅपलेनी केले असून काळाच्या ओघात त्यात दोष सापडलेला नाही. शॅपलेचे वय आता ८९ च्या पुढे आहे, जे उमेदीचे म्हणता येणार नाही. त्यांचे कार्य उपयोजनेसाठी विविध प्रकारे उपयुक्त ठरले आहे व त्याचे श्रेय रोथ यांना जाते. एक चांगली जमेची बाब म्हणजे रोथ यांचे वय ६१ असून ते उच्च प्रतीचे योगदान व तरुणांना मार्गदर्शन करू शकण्याच्या स्थितीत आज आहेत.

निवडलेले योगदान

आता आपण निवडलेल्या योगदानाच्या कल्पनेकडे वळुया. दोन किंवा अधिक पक्ष, संसाधनांचे प्रकार किंवा परस्पर संबंध सुस्थिर राहणे हे त्यांच्यासाठी, त्यांच्या वित्तीय व आर्थिक इष्टतम उपयोगासाठी आणि एकूण सामाजिक कल्याणासाठी महत्त्वाचे आहे. अर्थातच अशी स्थिरता टिकण्यासाठी संबंधित सर्व पक्षांचे समाधान होत राहणे गरजेचे असते. याचा अर्थ मुळात त्यांची जुळणी योग्य प्रकारे होणे नितांत आवश्यक ठरते. तत्वत: जुळणीसाठी अनेक युती व जोडणी होण्याच्या व्यवस्था शक्य असतात, पण त्या स्थिर राहतील का ? शॅपले यांनी गणिती पद्धतीने असे एका प्रमेयाद्वारे सिद्ध केले आहे की वागण्याचे काही स्वाभाविक नियम मान्य केल्यास एक सुस्थिर जुळणी अवश्य मिळते. त्यासाठी त्यांनी डेव्हिड गेलसोबत एक जुळणीची पद्धत विकसित केली व त्यावर आधारित एक लेख १९६२ साली प्रसिद्ध केला. त्याचे शीर्षक 'महाविद्यालयातील प्रवेशपद्धती आणि विवाहाची स्थिरता' असे वेगळे व उत्सुकता वाढवणारे आहे. विशेष म्हणजे हा छोटेखानी लेख *अमेरिकन मॅथमेटिक मंथली* (खंड ६९, पृ. ९–१५) या गणिताला वाहिलेल्या मासिकात प्रसिद्ध झाला आणि न की अर्थशास्त्राच्या जर्नल किंवा मासिकात!

शॅपलेने ज्या गणिती तर्क व पद्धतीचा आधार घेतला ते खेळाचे शास्त्र किंवा द्यूतसिद्धांत (गेम थेयरी) या विषयात मोडते. या विषयाची औपचारिक घडण १९४४ मध्ये जॉन व्हॉन न्यूमान आणि ऑस्कर मॉर्गेस्टर्न प्रकाशित 'द्यूत सिद्धांत आणि आर्थिक वर्तणूक' या एका पुस्तकात झाली. आर्थिक स्पर्धेला मांडण्याची एक नवीन गणिती बैठक त्यामुळे मिळाली व अर्थशास्त्राचा एक महत्त्वाचा भाग म्हणून गेम थेयरीला यथाकाळ मान्यता मिळाली. त्यात जे. नॅश, जे हरसनायी, टी. सी. शेलिंग, एल. हुरविझ, जे. ऑमन इत्यादीनी बहुमोल भर घातली. त्याचमुळे १९९४, २००५ व २००७ साली देण्यात आलेली अर्थविज्ञानातील नोबेल पारितोषिके ही गेम थेयरीचा विकास व उपयोजन यासाठीचीच मानली जातात आणि अलीकडचे २०१२ चे ही त्याच श्रेणीत मानले जाऊ शकते. स्पर्धा किंवा विवाद यांचा अंतर्भाव गेम थेयरीमध्ये मोठ्या प्रमाणात असल्यामुळे सुरक्षा व सेवादलाशी संबंधित संस्थांचे तिच्याकडे लक्ष गेले व दुसऱ्या महायुद्धात उदयास आलेल्या ऑपरेशनल रिसर्च या गणिताधारित विषयाचा ती एक भाग बनली व नंतर व्यवस्थापनशास्त्राचा एक अविभाज्य भाग झाली.

शॅपलेनी स्पर्धेच्या जोडीला सहकार्य ही संकल्पना १९५० च्या दशकात मांडून गेम थेयरीला एक नवीन दिशा प्रदान केली. म्हणूनच अशा प्रकारे प्राप्त होणाऱ्या खेळाच्या मूल्याला 'शॅपले मूल्य (व्हॅल्यू)' असे म्हटले जाते. या अर्थाने शॅपलेंचे योगदान शैक्षणिक क्षेत्रात फार पूर्वीच मान्य झालेले आहे.

उदाहरण

समाजामध्ये झालेले विवाह स्थिरपणे टिकावे हे फार महत्त्वाचे ठरते. त्यासाठी आरंभीच जोड्या जुळताना पुरुष व स्त्रीची एकमेकास पसंती परिपूर्णतेची असावी असे बहुतकरून मानले जाते (दोघांची कुंडली, पत्रिका जुळवणे हा तसाच एक प्रकार आपल्या समाजात रूढ झालेला आहे, पण तो नेहमी यशस्वी ठरतो असे नव्हे).

विवाह जुळणी स्थिर राहील का हा प्रश्न पुढील प्रमाणे मांडता येईल. समजा प१, प२, प३ आणि प४ असे चार पुरुष आहेत व म१, म२, म३ आणि म४ अशा चार स्त्रिया आहेत. प्रत्येक पुरुष विवाहाच्या दृष्टीने चार ही स्त्रियांची पसंतीप्रमाणे उतरती क्रमवारी आकृती १ मधील तक्त्याप्रमाणे लावतो. त्याचप्रमाणे प्रत्येक स्त्रीही चारही पुरुषांची पसंतीप्रमाणे उतरती क्रमवारी लावते (आकृती २).

पुरुषांची पसंतीवार क्रमावरी

प१ :	म१	म२	म३	म४
प२ :	म४	म२	म३	म१
प३ :	म४	म३	म१	म२
प४ :	म१	म४	म३	म२

आकृती १

स्त्रियांची पसंतीवार क्रमावरी

म१ :	प२	प३	प१	प४
म२ :	प३	प१	प२	प४
म३ :	प४	प१	प२	प३
म४ :	प१	प४	प२	प३

आकृती २

समजा पुढीलप्रमाणे जोड्या लावून विवाह झाले : (प१, म४), (प२, म३), (प३, म२) व (प४, म१). ही जुळणी अस्थिर असेल कारण प१ ला म४ पेक्षा म१ अधिक पसंत आहे, तर म१ ला प४ पेक्षा प१ अधिक पसंत असेल. त्यामुळे प१ आणि म१ हे सध्याच्या जोडीदाराला सोडून (घटस्फोट देऊन) एकमेकाशी विवाह करण्याचा निर्णय घेऊ शकतात (पाश्चात्य देशांत असे घडण्याचे प्रमाण अधिक असल्याचे आढळते). अशा जोडीला *अवरोधक* जोडी

(ब्लॉकिंग पेअर) म्हटले जाते. अशी एक ही अवरोधक जोडी नसल्यास सुस्थिर जुळणीची स्थिती प्राप्त होते. गेल आणि शॅपलेनी असे सिद्ध केले की पुरुषांची आणि स्त्रियांची पसंतीवर क्रमवारी कशीही असली तरी एक सुस्थिर जुळणी नक्की असते. सुस्थिर जुळणी शोधण्याची त्यांनी एक पद्धत मांडली. या पद्धतीला 'कालांतराने मान्यता (डिफरड् एक्सेप्टन्स)' असे म्हटले जाते आणि ती काही फेऱ्यांमध्ये वापरली जाते.

या पद्धतीनुसार प्रत्येक पुरुषाने आपल्या सर्वांत अधिक पसंतीच्या स्त्रीपुढे विवाह प्रस्ताव मांडायचा अशा एक प्रकारे सुरवात करायची. मग प्रत्येक स्त्रीने तिला आलेल्या प्रस्तावांतून तिला सर्वांत अधिक पसंत असलेल्या पुरुषाला थांबवून ठेवायचे आणि बाकीच्या पुरुषांना नकार कळवायचा. एखाद्या स्त्रीपुढे काहीच प्रस्ताव आले नसल्यास तिने काही करायला नको. इथे पहिली फेरी संपली.

दुसऱ्या फेरीत प्रत्येक पुरुषाने त्याला नकार असल्यास उरलेल्या स्त्रियांपैकी त्याला सर्वात अधिक पसंत असलेल्या स्त्रीपुढे विवाहाचा प्रस्ताव मांडायचा. स्त्रीने तिला जर काही नवीन प्रस्ताव आले असतील तर ते पुरुष आणि आधी तिने कोणाला थांबवले असेल तो पुरुष या सर्वांमध्ये अधिक पसंत असणाऱ्या पुरुषाला थांबवून ठेवावे व इतरांना नकार द्यावा. याप्रमाणे दुसरी फेरी संपली. पुढच्या फेरी याचप्रमाणे पार पाडल्यावर शेवटी निर्माण होणारी जुळणी सुस्थिर असेल हे पडताळता येते. वरील पद्धतीप्रमाणे प्राप्त होणारी सुस्थिर जुळणी : (प१, म१) (प२, म२), (प३, म३) आणि (प४, म४) अशी असेल.

मात्र पहिली फेरी म्हणजे स्त्रियांनी पुरुषांपुढे प्रस्ताव मांडणे अशी असल्यास शेवटी प्राप्त होणारी सुस्थिर जुळणी वेगळी असेल : (प१, म४), (प२, म१), (प३, म२) आणि (प४, म३). अशा पद्धत वापराच्या बदलामुळे निर्माण होणाऱ्या वेगळ्या सुस्थिर जुळण्यांचा अधिक गणिती अभ्यास केला गेला असून त्यामुळे कुठल्या पक्षाला अधिक लाभ मिळतो, तसेच मुद्दाम पसंतीची खोटी क्रमवारी वापरल्यास कुणाला कसा लाभ मिळतो, हे समजू शकते.

विस्तारित उपयोजन

वरील उदाहरण काहीसे कृत्रिम वाटू शकते. पण अशा परिस्थिती विद्यार्थी व महाविद्यालयात प्रवेश निवडीसंबंधात प्रत्यक्षात असतात. रोथ यांनी शिकावू डॉक्टर्स आणि रुग्णालये यांची एकमेकास वेगवेगळे पसंतीक्रम असल्यास

सुस्थिर जुळणी करण्यासाठी गेल-शॅपले पद्धतीचा मोठ्या प्रमाणात वापर केला, तसेच अमेरिकेत व इंग्लंडमधील व्यवस्थांत तपासला व काही वेळा तो पूर्णपणे यशस्वी न होण्याची कारणे देखील शोधली.

रोथ यांनी असे ही दाखवले की अशी पद्धत वापरताना रुग्णालयांना फायदा होण्याची शक्यता तरुण डॉक्टर्सपेक्षा अधिक असते व तो समतोल असण्यासाठी काय केले पाहिजे हे त्यांनी सुचवले. या संदर्भात रोथनी इ. पेरनसनसोबत एक सुधारित जुळणी पद्धत विकसित केली. त्यात काही विवाहीत डॉक्टर्स युगल एकाच भौगोलिक क्षेत्रातील रुग्णालयाला जोडले जातील अशी प्रत्यक्षात असलेली मागणी पण त्यांनी विचारात घेऊन तिला न्याय देणारी सुस्थिर जुळणी निर्माण करणे शक्य आहे, असे दाखवले. ती पद्धत अमेरिकेतील संबंधित सर्वोच्च राष्ट्रीय प्रबंधक संस्थेने १९९७ पासून वापरण्यास सुरुवात केली असून दरवर्षी २०,००० हून अधिक जुळण्या डॉक्टर्स-रुग्णालये नेमणूकांसाठी यशस्वीपणे वापरात आहे. अर्थातच रोथ-पेरनसनची पद्धत संगणकाद्वारे कार्यान्वित करण्यासाठी उपयुक्त अशी आहे.

याच धर्तीवर न्यूयॉर्क मधील सार्वजनिक उच्च माध्यमिक शाळांतील प्रवेश प्रक्रिया मुलांनी पाच क्रमवार शाळेंचे पर्याय दिल्याप्रमाणे केली जात आहे. रोथ व त्यांच्या सहकाऱ्यांनी विकसित केलेल्या सदर सुधारित सुस्थिर जुळणी पद्धतीमुळे २००३ पासून ९० टक्क्यांहून अधिक विद्यार्थ्यांना त्यांच्या पाच पर्यायांपैकी एका पर्यायी शाळेत प्रवेश मिळणे शक्य झाले आहे, जी एक लक्षणीय उपलब्धी आहे. अमेरिकेतील इतर राज्यांतील शाळा प्रवेशासाठी देखील हीच पद्धत वापरणे सुरू झाले आहे.

सदर जुळणी प्रक्रियेत दोन्ही पक्ष सक्रियेपणे पसंती ठरवू शकतात असे मानले आहे, पण प्रत्यक्षात एक पक्ष निष्क्रिय असू शकतो. अशी स्थिती दान केलेले मूत्रपिंड किंवा इतर अवयव व त्यांचे प्रत्यारोपण करण्याची गरज असलेल्या रुग्णांची योग्य जुळणी होण्यासंबंधात निर्माण होते. शॅपलेनी स्थिरतेची एक अमूर्त कल्पना मांडून त्यांच्या काही सहकाऱ्यांसोबत या संदर्भात 'टॉप ट्रेडिंग सायकल' या नावाची एक सुलभ पद्धती निर्माण केली होती. तिचा आधार घेऊन रुग्णाला अनुरूप आणि दान केलेल्या अवयवाची सुस्थिर व सुयोग्य जुळणी करण्याचे प्रयत्न केले जात आहेत. यात अधिक संशोधनाची गरज आहे व वैद्यकीय क्षेत्रातील तज्ज्ञांचा सहभाग आवश्यक आहे.

गेल-शॅपले सुस्थिर जुळणी पद्धतीचा विस्तार अनेक दिशांनी केला जात आहे. त्यातील एक म्हणजे आंतरजाळे (इंटरनेट) माध्यमातून लिलाव प्रक्रिया

सक्षमपणे पार पाडणे. साहजिकच या संदर्भात वस्तुचे वित्तीय मूल्य किंवा किंमत हा एक महत्त्वाचा घटक विचारात घेणे आवश्यक ठरते, जे शॅपलेच्या मूळ गणिती प्रतिकृतीत नव्हते. लिलाव तसेच जाहिरात क्षेत्राची वाढती व्याप्ती आणि उलाढाल बघता अनेक कंपन्या अर्थशास्त्रातील तज्ञांना गेल-शॅपले पद्धतीचा चपखल वापर करण्यासाठी आमंत्रित करताना आढळतात.

संगणक आज्ञावली (सॉफ्टवेअर) विकसित करणाऱ्या कंपन्या तसेच समंत्रक (कंसल्टींग) कंपन्या त्यांच्या आंतरिक विविध गट निर्मितीसाठी सुस्थिर जुळणीच्या पद्धती वापरू शकतात.

आपल्या देशातील संसाधनांचा समुचित उपयोग करण्यासाठी सदर सुस्थिर जुळणी तत्व आणि पद्धतींचा वापर करण्यावर जोर देण्यात आला पाहिजे. युती किंवा आघाडी यांनी सरकार स्थापन करताना राजनैतिक सुस्थिरता कशी आणता येईल याचा अभ्यास शॅपले व रोथ यांच्या या कामाचा आधार घेऊन करणे योग्य ठरेल. मोठ्या वेगाने बदलणाऱ्या सध्याच्या जगात अस्थिरता हा एक कळीचा मुद्दा आहे. तरी अर्थविज्ञानातील २०१२ सालच्या नोबेल पारितोषिकासाठी सुस्थिर जुळणी या बहुतांश गणिती अशा संकल्पना व पद्धतीला निवडून कदाचित निवड समितीने स्थिरता निर्माण करण्यासाठी प्रयत्न करणे व त्यासंदर्भात अनुभवसिद्ध साधने उपलब्ध आहेत याकडे जगाचे लक्ष वेधण्याचा प्रयत्न केला आहे असेही म्हणता येईल.

(टीप : या लेखासाठी वापरलेल्या स्त्रोतांचे आभार)

⌘⌘⌘

४३

युद्ध आणि गणित

खालील समीकरणे (डिफरन्शियल इक्वेशन्स) कोणाच्याही टी-शर्टवर छापलेली, हातावर गोंदवलेली किंवा वाहनावर रंगवलेली दिसली तर गणिताचे जाणकार अस्वस्थ होतात :

$$\frac{db(t)}{dt} = -k_r r(t), \quad b(0) = B,$$

आणि

$$\frac{dr(t)}{dt} = -k_b b(t), \quad r(0) = R,$$

याला कारण म्हणजे १९१४ मध्ये एफ. डब्ल्यू. लँकेस्टरने (१८६८-१९४६) या दोन समीकरणांद्वारे आधुनिक काळातील दोन तुल्यबळ शत्रूंच्या लढाईचे भयानक परिणाम मांडले होते. या गणिती प्रतिकृतीचा आता व्यापक विस्तार झाला असून जगातील जवळपास सर्व सेनादले त्यांच्या युद्ध व रणनितींची आखणी त्यानुसार करण्याचा प्रयत्न करतात. त्याचा एक विशेष प्रकार गनिमी युद्ध (गुरीला वॉरफेअर) तसेच पारंपारिक व गनिमी युद्ध एक सोबत खेळण्याचे गणित दाखवतो. एकूण लष्करी डावपेच आखणे, सेनेच्या विविध गटात सूसुत्रता राखणे, मर्यादित दारूगोळा असल्यास काय करावे अशा अनेक बाबी मार्कोव्ह साखळी पद्धती, प्रसंभाव्य (स्टोकास्टिक) प्रक्रिया, आलेख सिद्धांत असे प्रगत गणित वरील समीकरणांच्या सोबतीला घेऊन युद्ध खेळण्याच्या विविध गणिती पद्धती सातत्याने विकसित केल्या जात आहेत.

गोपनीय संदेश फोड

शत्रूचे सांकेतिक भाषेतील संदेश पकडून त्यांचे अर्थ लावणे हा पण युद्धाचा एक मोठा भाग आहे. दुसऱ्या महायुद्धात उदाहरणार्थ, जर्मन नौसेनेचे असे गोपनीय संदेश ब्रिटिश सैन्याला वेळेत फोडणे जमल्यामुळे खूप फायदा झाला. या कामात ए. ट्युरिंग या प्रख्यात गणितीचे योगदान तसेच पोलंडमधील युवा-गणितज्ञांनी निर्माण केलेल्या अमूर्त बीजगणिती पद्धती अतिशय महत्त्वाच्या ठरल्या. आता त्या जोडीला संगणकाची साथ मिळाल्यामुळे गोपनीय संदेश क्लिष्ट करणे, तसेच त्यांची फोड करणे याचे गणित फारच पुढे गेले आहे.

गेम थेयरी

गेम थेयरी ही खऱ्या अर्थाने जे. व्ही. न्यूमान आणि ओ. मॉर्गेस्टर्न यांच्या १९४४ साली प्रसिद्ध झालेल्या एका पुस्तकाने पुढे आली. तिचा मूळ उद्देश आर्थिक क्षेत्रातील स्पर्धेचा अभ्यास असा होता. पण सैनिकी क्षेत्रात तिची उपयुक्तता लवकर लक्षात आल्यामुळे तिचा लष्करी वापरासाठी विकास करण्यावर मोठ्या प्रमाणावर भर दिला गेला. आज सगळ्या संरक्षण विभागात गेम थेयरीचा वापर अनेक स्तरावर केला जातो. अर्थातच ती ऑपरेशनल रिसर्च या सैनिकी प्रश्नांसाठी विकसित झालेल्या (दुसऱ्या महायुद्धात) विषयाचा अविभाज्य भाग बनली आहे.

युद्धासाठी गणित

तसे पाहिल्यास युद्धासाठी गणिताचा वापर याचा इतिहास मोठा आहे. महाभारतात वर्णन केलेल्या युद्धात कौरव व पांडवांचे सेनापति वेगवेगळे व्यूह रचत (उदा. चक्रव्यूह), जे की भूमितीच्या सिद्धांतावर आधारित असत. आर्किमिडीजने (इ.स. पूर्व २८७-२१२) गणिती नियम वापरून त्याच्या राजासाठी काही भेदक अस्त्रे निर्माण केली होती. लष्करी संदेश गोपनीय करण्याची एक गणिती पद्धत ज्युलियस सीझरने विकसित केल्याची नोंद आहे. जे. नेपियर (१५५०-१६१७) याने १६१४ मध्ये तयार केलेल्या लोगॅरिथम्स सारणींचा (टेबल्स) वापर तोफांचा मारा अचूक करण्याच्या गणिती आकडेमोडीसाठी पुढे केला गेलेला आढळतो. यावरून असे दिसते की युद्धाच्या विविध बाबींसाठी गणिताचा उपयोग तसेच काही वेळा नवीन गणिती पद्धती निर्माण करण्यात आलेल्या आहेत. अर्थातच सैनिकी संस्थांचे लक्ष अशा गणिती विकासाकडे सतत असते व अनेक वेळा त्या त्यांच्या

गरजा दूर करण्यासाठीचे गणिती संशोधन करणाऱ्यांना आर्थिक पाठबळ व इतर सुविधाही पुरवतात. त्यामुळे शिक्षकी पेशा सोडल्यास जगात सर्वात जास्त प्रमाणात गणिती हे संरक्षण खात्यासाठी काम करताना दिसतात.

गणित आणि शांतता

मात्र याचा असा अर्थ काढू नये की गणिताचा शांततेसाठी उपयोग केला जात नाही. या विपरीत विवाद सोडवणे आणि सहकार्य वाढवणे याबाबतीतले गणितही जोमाने विकसित केले जात आहे. या संदर्भात एल. एफ. रिचर्डसन (१८८१-१९५३) यांनी मूलभूत काम केले आहे. त्यांची गणिती सूत्रे विस्तारित करून अस्त्र स्पर्धा कशी टाळता येईल, संरक्षण स्थैर्य कसे उभारता येईल, देशा-देशात सामंजस्य कसे निर्माण करता येईल अशा अनेक प्रश्नांबाबत उत्तरे शोधली जात आहेत. मुख्य म्हणजे असे गणित हे आर्थिक, पर्यावरण, मानव अधिकार व सांस्कृतिक क्षेत्रातील समस्या सोडवण्यासाठीदेखील उपयुक्त ठरत आहे.

गणित कशासाठी वापरायचे हे सर्वस्वी माणसाच्या हातात आहे. युद्धजनक परिस्थिती टाळण्याचे गणित विकसित करून ते वापरणे हे फार महत्त्वाचे असे आव्हान आहे.

पूरक माहिती :

- गणित तसेच सर्व ज्ञानशाखांचा उपयोग शांतता आणि अहिंसा यासाठी जास्तीत जास्तपणे करण्यास प्रोत्साहन देण्यासाठी 'सेंटर फॉर ग्लोबल नॉनकिलींग' नावाची एक आंतरराष्ट्रीय संस्था कार्यरत आहे. सदर संस्थेची भूमिका व कार्य समजून घेणे आणि तिची विविध प्रकाशने प्राप्त करण्यासाठी तिच्या संकेतस्थळास भेट द्यावी : http://www.nonkilling.org
- अहिंसेसाठी गणिताचा वापर कसा करता येईल या संदर्भात पुढील शोधलेख बघावा : Patkar, V., "Mathematics for Building a Nonkilling Ethos", in J. E. Pim (ed.), *Engineering Nonkilling - Scientific Advancement of Killing-Free Societies*, Honolulu, Hawai'i: Centre for Global Nonkilling, 2011, pp. 93-107. (http://www.nonkilling.org/node/18)

⌘⌘⌘

४४

गणिती संशोधन : दिशा आणि आव्हाने

माणसाच्या सर्वांगीण प्रगतीचा आलेख गणिताचे योगदान लक्षात घेतल्याशिवाय आखणे शक्य नाही. विज्ञान, तंत्रज्ञान आणि सामाजिक विज्ञान यांच्या विकासात सतत भर घालणे हे गणितातील नव-नवीन संकल्पना, पद्धती आणि साधने यांच्या निर्मितीमुळे बहुतांशी झाले आहे. म्हणजेच गणित या एकूण विषयात निरंतरपणे चालू असलेल्या संशोधनामुळे तसे घडत आहे. गणिती संशोधन कसे असते, ते कसे केले जाते, ते कोण करू शकतात असे अनेक प्रश्न नेहमी विचारले जातात, तरी असे कुतूहल शमवणे आणि गणितातील संशोधनाबाबतचे विविध पैलू मांडणे असा प्रयत्न या लेखात केला आहे.

गणिताचा विस्तार

गणिताची सुरवात 'मोजणे' या संकल्पनेपासून झाली आणि हाताची बोटे हे कदाचित त्यासाठीचे पहिले साधन होते. अशा साध्या पण उपयोजन डोळ्यासमोर ठेऊन गणिताचा प्राथमिक विकास झाला. एका विशिष्ट पातळीनंतर मात्र अमूर्तपणाचा आधार गणिताला पुढे जाण्यासाठी घेणे भाग पडले, असे गणिताचा इतिहास दाखवतो. यामुळे गणिताची पुढील वाटचाल उपयोजन आणि अमूर्तपणा अशा दोन मार्गांने होऊ लागली. काही वेळा हे दोन मार्ग एकत्र झाले, तर काही वेळा या दोघातील अंतर बरेच वाढलेले दिसते. या दोन्हीचा विकास पुढे-मागे, पण एकमेकांस पूरक ठरत आलेला आहे हे विशेष.

मार्ग कुठलाही अनुसरला असो, गणितरुपी वृक्षाचा विस्तार प्रचंड प्रमाणात झालेला आढळतो. तथापि ही वाढ बराच काळ अडखळत, चाचपडत अशी झालेली दिसते. याला मुख्य कारण म्हणजे गणिती अंक व चिन्हे यांची एक

प्रमाणित मांडणी पद्धती विकसित होण्यासा तब्बल १८ वे शतक उजाडावे लागले. लायबनित्झ, देकार्त, बर्नोली बंधू, ऑयलर अशा मान्यवर गणितज्ञांनी अंक, चिन्हे व गणित मांडणीच्या पद्धतीत सुसूत्रता आणि एकवाक्यता आणल्यावरच आधुनिक काळातील गणिताचा विकास फार झपाट्याने झालेला आहे. आज उपलब्ध असलेले संपूर्ण गणित बघितले तर त्याचा ९५% भाग हा सन १९०० नंतर निर्माण झालेला आहे ही बाब याची कल्पना देईल.

गणिताचा एकूण विस्तार बघता आता या विषयाला गणितविज्ञान असे व्यापक नाव दिले गेले आहे. त्याचे मुख्य विभाग असे आहेत :

१) मूलभूत गणित (उदा. अंकशास्त्र, भूमिती, ॲनालिसिस)

२) उपयोजित गणित (उदा. मेकॅनिक्स, हायड्रोस्टॅटिक्स, हायड्रोडायनेमिक्स)

३) संभाव्यता आणि संख्याशास्त्र (उदा. अंदाज वर्तवणे, गृहितकल्पना तपासणे, दर्जा नियंत्रण)

४) विमाविज्ञान/विमागणित (उदा. जोखीम विश्लेषण, आयुर्मानाचा अंदाज घेणे, विमा हप्ता ठरवणे)

५) प्रवर्तन संशोधन (उदा. गणिती प्रायोजन, रांगेचे विश्लेषण, साठा करण्याचे निर्देशन)

६) संगणक विज्ञान (उदा. बूलियन तर्कशास्त्र व बीजगणित, गणिती पद्धतींची क्लिष्टता)

७) लोकसंख्याशास्त्र (उदा. जन्म-मृत्यू दर विश्लेषण, लोकसंख्येचे अनुमान आणि तिचे भौगोलिक वितरण)

साहजिकच या प्रत्येक विषयाच्या शाखा आणि उपशाखा यांची वाढ मोठ्या प्रमाणावर होत आहे कारण जगातील विविध विद्यापीठे, महाविद्यालये, संशोधन व अन्य शैक्षणिक संख्या, संरक्षण खात्याच्या अखत्यारितील संस्था, खाजगी संस्था तसेच स्वतंत्र व हौशी संशोधक हे अविरतपणे गणिती संशोधन हाती घेऊन त्यात भर घालत आहेत. तरी आपण गणितातील संशोधन कशा प्रकारचे असते ते प्रथम बघू.

संशोधनाचे वर्गीकरण

संशोधन, मग ते विज्ञान, गणित किंवा सामाजिक विज्ञानातील कुठल्याही विषयाशी संबंधित असो, ज्ञानात भर घालणे, उपयोजन समोर ठेऊन एका

विशिष्ट दिशेने करणे, शासकीय धोरणे व कार्यक्रम आखणे आणि त्यांचे फलित तपासणे अशी त्याची अनेक रूपे असतात. प्रत्येक रूपाचे काही खास घटक आणि कार्यपद्धती असतात. गणित विज्ञानाच्या संदर्भात संशोधनाची एकूण चौकट आकृती १ मध्ये मांडली आहे.

ज्ञानवृद्धीसाठी उपयुक्तता ?		
होय	१ मूलभूत संशोधन	२ उपयोजन-प्रेरित मूलभूत संशोधन
नाही	४ वर्गीकरण, मंनोरंजनासाठी संशोधन	३ केवळ उपयोजनेसाठी संशोधन
	होय	नाही

उपयोजनेसाठी उपयुक्तता ?

आकृती १

संशोधन हे ज्ञानवृद्धीसाठी आहे किंवा नाही तसेच उपयोजनेसाठी आहे किंवा नाही या दोन प्रश्नांच्या होय किंवा नाही या उत्तरांनी निर्माण केलेले चार चौरस आकृती १ मध्ये दाखवले आहेत. त्यानुसार चौरस १ मध्ये सामील केले जाणारे संशोधन प्रामुख्याने ज्ञानवृद्धीच्या उद्देशाने केले जाते, उपयोजन झाले किंवा न झाले त्याकडे लक्ष दिले जात नाही. याचे उत्तम उदाहरण म्हणजे अंकशास्त्रात जी. एच. हार्डी यांनी संशोधन करताना वापरलेला दृष्टिकोन (मात्र काही वर्षानंतर त्यांचे अमूर्त गणिती निष्कर्ष संदेशांची गोपनीयता वाढवणे व उकलणे यासाठी वापरले गेले). गणित हे फक्त गणितासाठी अशी भूमिका असलेल्या या संशोधनाला मूलभूत संशोधन असे म्हटले जाते.

आकृती १ मधील चौरस २ हे उपयोजन-प्रेरित असे मूलभूत संशोधन दाखवते. कुठले तरी विशिष्ट वापर-उद्देश समोर ठेऊन नवीन गणिती संकल्पना आणि पद्धती विकसित करणे या प्रकारचे ते संशोधन असते. दुसऱ्या महायुद्धात

अमेरिकेच्या वायुसेनेकडे उपलब्ध असलेली मर्यादित विमाने, प्रशिक्षित विमानचालक, इंधन अशा घटकांचे अनेक सैनिकी उद्दिष्ट्ये गाठण्यासाठी इष्टतम वितरण कसे करावे या प्रश्नामुळे सरळरेषीय प्रायोजन (लिनिअर प्रोग्रामिंग) या सर्वस्वी नवीन गणिती संकल्पना आणि वापरासाठी सिम्प्लेक्स पद्धतीचा विकास हे जी. बी. डँटझिग यांचे संशोधन याचे सुंदर उदाहरण आहे. अशा संशोधनामुळे मूलभूत संशोधन तसेच उपयोजन या दोघांना नवी दिशा व चालना मिळू शकते.

काही वेळा संशोधन हे केवळ उपयोजन सक्षम करणे अशा संकुचित उद्देशाने केले जाते. त्यामुळे मूलभूत ज्ञानात भर न होणे किंवा नगण्य असणे याचा फारसा विचार केला जात नाही. आकृती १ मधील चौरस ३ असे संशोधन दाखवतो. उदाहरणार्थ, एखादा प्रश्न सोडवण्यासाठीची सध्याची उपलब्ध पद्धती वापरल्यास उत्तर मिळण्यास संगणकाचा एक तास असा वेळ लागत असेल तर त्या पद्धतीत थोडेसे बदल करून तो वेळ पंधरा मिनिटे असा प्राप्त करणे असे हे संशोधन असू शकते. अशा संशोधनामुळे सर्वस्वी नवी पद्धती निर्माण करणे किंवा प्रश्नाला अन्य प्रकारे मांडून सोडवणे असे मूलभूत गणितात भर घालणारे योगदान होत नसले, तरी व्यावहारिकदृष्ट्या असे संशोधनही महत्त्वाचे असते याची नोंद घ्यावी.

गणितातील काही प्रकारचे संशोधन ज्ञान किंवा उपयोजन यात थेट वृद्धी करणारे नसते, जे आकृती १ मधील चौरस ४ दाखवतो. मनोरंजनात्मक गणिताचा बहुतांश भाग या प्रकारात मोडतो. नवीन कूटप्रश्न तयार करणे, आकृत्या बनवणे, व्हिडीओ खेळ निर्माण करणे यांसंबंधी केलेले संशोधन असे असते. गणितातील विविध संकल्पनांचा संबंध जोडणे, वर्गीकरण करणे, गणिती इतिहास तपासणे हे देखील अशा संशोधनात समाविष्ट असते. मात्र काही वेळा अशा संशोधनातून मूलभूत संशोधनासाठी किंवा उपयोजनासाठी एखादी कल्पना किंवा मार्ग निघू शकतो, तसेच गणित अध्यापन आणि अध्ययन यासाठी उपयुक्त पद्धती विकसित होऊ शकतात. तरी या प्रकारच्या गणिती संशोधनाचे आपले एक वेगळे स्थान आहे.

जे. व्ही. न्यूमान (१९०३–५७) हा एक असामान्य गणितज्ञ होता, ज्याने मूलभूत गणित (उदा. न्यूमान बीजगणित), उपयोजन (उदा. गेम थेयरी) आणि संगणकीय पद्धतीचा विकास यात फार मोलाचे संशोधन केले व त्याचबरोबर शासकीय यंत्रणेशी जुळवून घेऊन गणितविज्ञानाला एक वेगळीच प्रतिष्ठा मिळवून दिली. असे अपवादात्मक गणितज्ञ सोडले तर वरील सर्व प्रकारच्या

संशोधनात भरीव योगदान करणे आता सामान्यपणे कोणालाही शक्य नाही. याला एक कारण म्हणजे गणितज्ञाची मानसिकता आणि दुसरे म्हणजे प्रत्येक संशोधनाच्या विषयात प्रचंड प्रमाणात प्रसिद्ध होत असलेले साहित्य शोधणे (मुद्रित आणि अंकीय), समजणे व नंतर त्यात भर घालणे यासाठी उपलब्ध असलेला वेळ. काही गणितज्ञ केवळ मूलभूत संशोधन करू शकणाऱ्या वृत्तीचे असतात व उपयोजन कुठे करता येईल यासाठी इतर विषयांत रस घेणे त्यांना सहसा जमत नाही.

काही गणिती अमूर्त विषयाऐवजी काहीशा व्यावहारिक उद्देशांनी प्रेरित होऊन संशोधन करू शकतात. तर काही संशोधक गणित शिकण्याच्या नवीन पद्धती, ऐतिहासिक विकास, कोडी निर्माण करणे अशा गणिताच्या परिधीवरील विषयांत संशोधन करू शकणाऱ्या मानसिकतेचे व कुवतेचे असतात. तरी प्रत्येकाने आपली मानसिक बैठक किंवा प्रवृत्ती कशा प्रकारची आहे हे जाणून गणित संशोधनाचे क्षेत्र व विषय निवडावे. तथापि कोणी कुठल्या प्रकारचे गणिती संशोधन करावे ह्यावर कसले ही बंधन नाही, कारण प्रत्येक गणिती निष्कर्ष वस्तुनिष्ठतेने तपासून मान्य किंवा अमान्य केला जातो, तो कोणी मांडला हे बघितले जात नाही.

गणिती संशोधन

संशोधन हे मूलतः कुठल्याही प्रश्नाचा किंवा त्याच्या एका भागाचा सखोल अभ्यास करून त्यावर नवीन प्रकाश टाकणे अशा उद्देशाने केले जाते. या संदर्भात गणितातील संशोधन प्रामुख्याने पुढील प्रकाराने केले जाणे अपेक्षित असते.

१. काही निष्कर्ष प्राप्त करताना विशिष्ट गृहीतके किंवा स्थिती मानलेल्या असतात. तरी ती गृहीतके कमी करून किंवा वगळून तसे निष्कर्ष सामान्य स्थितीसाठी प्राप्त करणे, याला 'जनरलायझेशन' असे म्हणतात.

२. एखादा प्रश्न सोडवण्यासाठी विकसित केलेल्या सद्यःपद्धतीला सुधारणे, किंवा अधिक कार्यक्षम अशा नवीन पद्धती निर्माण करणे.

३. गणितातील दोन किंवा अधिक शाखांतील संकल्पना व पद्धतींत सांगड घालणे.

४. कुठल्याही विषयातील प्रश्न (उदा. भौतिकविज्ञान, अर्थशास्त्र) किंवा व्यावहारिक समस्या सोडवण्यासाठी गणिती प्रतिकृती/संरचना (मॉडेल) तयार करून उत्तर काढणे व नंतर त्या प्रतिकृती व्यापक करत जाणे.

५. गणितातील काही अनुत्तरित प्रश्न व अटकळी यांना संपूर्णपणे किंवा अंशतः सोडवण्याचा प्रयत्न करणे.

६. सर्वस्वी नवी अमूर्त संकल्पना मांडून तिचा गणिती विकास करणे व नंतर तिचा गणिती उपयोग आणि अन्य प्रकारचे उपयोजन शोधणे.

७. गणिताचा इतिहास व तत्त्वज्ञान यांचा अभ्यास करून गणिताची वाटचाल व भविष्याबद्दल भाष्य करणे.

८. मनोरंजनात्मक गणितात भर घालणे व त्याचा औपचारिक गणिताशी संबंध जोडणे.

प्रत्यक्षात केले जाणारे संशोधन

कागद व शिसपेन्सिल अशा किमान साधनांनी गणिती संशोधन आणि ते ही उच्च दर्जाचे, करणे आजही शक्य आहे याची नोंद घ्यावी. त्या विपरित काही संशोधनासाठी प्रगत गणक (कॅल्क्यूलेटर) आणि संगणक यांचा वापर अनिवार्य असू शकतो. यामुळे प्रत्यक्षात गणिती संशोधन विविध प्रकारे केले जाते. ते पुढील प्रमाणे मांडता येईल :

अ) शैक्षणिक :– एम. फील. आणि पीएच.डी. या संशोधनासाठी दिल्या जाणाऱ्या पदव्या असल्यामुळे विद्यापीठे, काही निवडक महाविद्यालये आणि संशोधनासाठी मान्य झालेल्या संस्थामध्ये हाती घेतले जाणारे संशोधन शैक्षणिक प्रकारचे म्हटले जाते. या पदव्या प्राप्त करण्यासाठी पूर्ण–वेळ किंवा अर्ध–वेळ काम करणारे संशोधक आणि तशा पदवीप्राप्त प्राध्यापक मंडळी यांचे गणिती संशोधन भारतामध्ये अधिकतर मूलभूत ज्ञानात भर घालणारे अशा स्वरूपाचे आढळते. त्या संशोधनावर आधारित शोधलेख गणिती जर्नल्स, परिषदेत सादरीकरण आणि पुस्तके याद्वारे प्रसिद्ध केले जातात.

विद्यापीठ अनुदान आयोग आणि अनेक शासकीय व इतर संस्था अशा संशोधनासाठी शिष्यवृत्ती, परिषदेचा खर्च आणि पुस्तक प्रकाशन खर्च उचलून मदत करतात. काही विशिष्ठ प्रकारचे संशोधन शैक्षणिक संस्थानी हाती घेण्यासाठी उद्योग–पुरस्कृत संशोधन कार्यक्रम आणि प्रकल्प राबवले जातात. उदाहरणार्थ, आय.आय.टी. या शैक्षणिक संस्थेत असे अनेक पुरस्कृत संशोधन कार्यक्रम सतत चालू आहेत.

ब) व्यावसायिक :– संरक्षण खाते आणि अनेक वैज्ञानिक संस्थांतर्गत असे गणिती संशोधन हाती घेतले जाते. बहुतेक वेळा ते एका विशिष्ट उद्देशपूर्तीसाठी केले जाते. त्यामुळे मूलभूत ज्ञानात वृद्धीऐवजी दिलेले उद्दिष्ट प्राप्त करणे हे संशोधनासाठी अधिक महत्त्वाचे असते. तसेच ते ठराविक मुदतीत समाप्त करणे ही भाग असते. असे संशोधन काही वेळा एका गटात किंवा मोठ्या बहुशास्त्रीय संघात करावे लागू शकते. या संशोधनाचे निष्कर्ष मर्यादित प्रमाणात आणि रीतसर छाननी व परवानगीनेच प्रसिद्ध केले जाऊ शकतात.

अनेक खाजगी संस्था व कंपन्यांची संशोधन केन्द्रे किंवा संशोधन विभाग असतात, ज्यात गणिती संशोधक त्या संस्थेच्या हितासाठी केल्या जाणाऱ्या एकूण संशोधनात योगदान करतात. अनेक मोठ्या समंत्रक (कन्सल्टिंग) कंपन्या देखील गणिती संशोधन होती घेतात. मात्र त्याचे निष्कर्ष स्पर्धेमुळे सहसा प्रसिद्ध केले जात नाही. तसेच चालू असलेले संशोधन तडकाफडकी बंद करून दुसऱ्या विषयात सुरू करणे असे घडू शकते; कारण अग्रक्रम कंपनीची गरज बघून बदलणे हे पूर्णपणे व्यवस्थापनाच्या हातात असते.

क) हौशी :– असे संशोधन कुठली ही व्यक्ती, केव्हा ही करू शकते. गणितात या प्रकारचे संशोधन करण्यास भरपूर वाव आहे, कारण किमान साधने वापरून ते करणे सहज शक्य आहे. गणिती संकल्पनांवर आधारित नवी कोडी रचणे, कागदाच्या घड्यांनी गणिती आकृत्या बनवणे, गणिताचा इतिहास पूरिपूर्ण करणे, गणितज्ञांची चरित्रे तपासणे असे अनेक विषय, जे सहसा गणिताच्या मुख्य अध्ययन प्रवाहात नसतात, संशोधनासाठी निवडले जाऊ शकतात. हे विषय असंख्य आहेत ह्याची नोंद घ्यावी. साध्या संख्यांच्या करामतीपासून ते अनुत्तरित गणिती प्रश्न जसे की गोल्डबॅकची अटकळ आणि रिमानचा हायपोथेसिस, असा कुठला ही विषय हौशी गणिती संशोधक निवडू शकतो. त्याचे निष्कर्ष विविध मासिके आणि वर्तमानपत्रे प्रसिद्ध करतात. या संदर्भात मार्टिन गार्डनर यांनी व्यवसायाने गणितज्ञ नसूनही दोन दशकाहून अधिक काळ *सायण्टिफिक अमेरिकन* या प्रतिष्ठित मासिकात चालवलेला गणितविषयक स्तंभ हा एक आदर्श मानला पाहिजे.

भरपूर संधी उपलब्ध

वरील माहितीवरून लक्षात आले असेल की गणितात संशोधन विविध प्रकारे केले जाते. तसेच ज्यांना गणितात रस आहे व त्यात काही तरी नवीन

साध्य करायचे आहे त्यांना स्वतंत्रपणे संशोधन करण्यास भरपूर संधी उपलब्ध आहेत. अर्थातच शैक्षणिक आणि व्यावसायिक गणिती संशोधनासाठी गणितविज्ञान किंवा त्याच्याशी संलग्न विषयात किमान स्नातकोत्तर पदवीची आवश्यकता असते. तथापि केवळ गणितातील पदवी असल्यामुळे गणितात यशस्वीपणे संशोधन करता येईल असे गृहीत धरू नये. या संदर्भात तयारी कशी असावी याचा विचार आपण करूया.

संशोधनाची तयारी

गणितात औपचारिकरित्या संशोधन कारकीर्द घडवायची असल्यास गणितविज्ञानात स्नातक आणि स्नातकोत्तर पदव्या मिळवणे नितांत आवश्यक आहे. शैक्षणिक अहर्ता याशिवाय गणितातील मूलभूत विषय, प्रमुख कार्यपद्धती (उदा. निगमन, विगमन, परिवर्तन पद्धती), तर्कसंगत विचारसरणी आणि काटेकोर मांडणी अशा गणिती संशोधनाला पूरक बाबींची माहिती व सराव अशा शिक्षणात मिळतो. व्यावसायिक संशोधकाने त्याच्या निवडलेल्या विषयाशी संबंधित सर्व मूलभूत पुस्तके (पाठ्य पुस्तकांशिवाय), संकल्पना व परिभाषा कोश तसेच संकेतस्थळे आणि अन्य अंकीय माहिती शोधून, वाचून ग्रहण करणे याने सुरवात करावी. त्याचबरोबर त्याच्या विषयातील शोधलेख सहसा प्रसिद्ध करणारी गणितविज्ञानातील सर्व जर्नल्स व नियतकालिकांची यादी बनवून ती कुठल्या ग्रंथालयात उपलब्ध आहेत याचा शोध घ्यावा.

सर्वात महत्त्वाचे म्हणजे *मॅथेमॅटिकल रिव्ह्यूज* या शोधलेखांचा सारांश देणाऱ्या व तत्सम जर्नल्सच्या गेल्या किमान पाच वर्षातील सर्व अंकांचा अभ्यास करून उपयुक्त लेखांची नोंद करावी. या संदर्भात हौशी संशोधकांनी *अमेरिकन मॅथेमेटिकल मंथली, द मॅथेमेटिकल इंटिलिजेन्सर* या प्रकारची नियतकालिके अवश्य वाचावीत. नंतर ते लेख मिळवून वाचावेत आणि त्याबाबत व्यवस्थितपणे नोंदी तयार कराव्यात. त्यांचा उपयोग 'साहित्य आढावा' या प्रबंधाच्या किंवा शोधलेखाच्या प्रकरणासाठी करता येतो. संबंधित शोधलेखांच्या लेखकांशी संपर्क साधावा (इ-मेलमुळे हे अतिशय सुलभ झाले आहे). यामुळे अनेक फायदे होतात. ते लेखक तुम्हाला त्यांचे इतर उपयुक्त लेख देखील पाठवतात आणि बरीच अन्य माहिती आणि मार्गदर्शनसुद्धा पुरवतात. तरी संशोधकाने आपले असे संपर्कजाळे स्थापावे व गणिती विचारांची देव-घेव सातत्याने करत राहावी. नवीन संशोधन विषय आणि कल याबाबत अद्ययावत माहिती त्यामुळे प्राप्त होते.

त्याशिवाय काही घटकांची विशेष तयारी करणे महत्त्वाचे असते. ते खालीलप्रमाणे आहेत :

बैठक :– एका जागी बसून आकडेमोड करण्याची क्षमता वाढवणे.

सातत्य :– एका प्रश्नाचा निरंतर अभ्यास करत राहणे, तो विषय सतत मनात घोळवत राहणे याची सवय करणे.

कामसूपणा :– आळस आणि कंटाळा यांना थारा न देता जमेल तितका वेळ गणिती प्रश्नाचा मागोवा घेत राहणे.

वाचन व लेखन :– चांगल्या संशोधनासाठी चौफेर वाचन आणि गणिती लेखन करणे व सुधारणे असे नियमितपणे करणे अतिशय महत्त्वाचे आहे. यासाठी योग्य वेळापत्रक आखणे तसेच वाचनसामग्रीची काटेकोर निवड करणे यासाठी तज्ज्ञांचे मार्गदर्शन घ्यावे. संशोधन ग्रंथालये व अंकीय डेटाबेसेस वापरणे शिकावे. प्रसिद्ध गणितज्ञांची चरित्रे तसेच गणिताचे तत्त्वज्ञान या बाबतचे साहित्यही वाचावे.

चर्चेत सहभाग :– गणितातील तुमच्या आवडीच्या किंवा निवडलेल्या विषयांशी संबंधित महत्त्वाची चर्चासत्रे, परिषदा, परिसंवाद यामध्ये अवश्य भाग घ्यावा. तुमच्या विषयाच्या संबंधित संशोधन संस्था, संशोधक, जर्नल्स याबाबत अद्ययावत माहिती मिळवणे तसेच त्या विषयाबाबत चर्चागट (उदा. ब्लॉग) कुठले आहेत हे जाणून घेऊन चर्चेत सक्रीय भाग घेणे उपयुक्त ठरते. तुमचा त्या विषयातला रस इतराना समजणे अनेक प्रकारे उपयोगी सिद्ध होतो.

संगणक निपुणता :– गणितविज्ञानातील काही अपवादात्मक विषय वगळता संगणकाचा वापर सर्वप्रकारच्या संशोधनासाठी मोठ्या प्रमाणात होत आहे. तरी अधिकाधिक संगणक प्रणाली आणि आज्ञावली शिकणे, सराव करणे आणि त्यात निपुणता मिळवणे संशोधकाला अनिवार्य होत जाणार आहे. तरी यासाठी व्यवस्थित प्रशिक्षण घ्यावे. गणित प्रमेयाच्या सिद्धतेसाठी संगणकाचा वापर करण्यास कुठलाही कमीपणा किंवा न्यूनगंड बाळगू नये.

धीर न सोडणे :– गणित संशोधकाला अतिशय सोशिकपणे कार्य करत राहणे याला पर्याय नाही. तरी धीर न सोडता सतत प्रश्नाचा पाठपुरावा करत राहण्याची सवय करावी. त्यादृष्टिने सुरवातीस दुय्यम असे प्रश्न संशोधनासाठी निवडून त्यावरील कार्याचे काही लेख किंवा निबंध प्रसिद्ध केल्यास आत्मविश्वास

वाढण्यास मदत मिळते. तुमच्या विषयाची सद्यःस्थिती काय आहे याचा आढावा घेणारा लेख (रिव्ह्यू आर्टिकल) तयार करणे अनेक प्रकारे उपयोगी ठरते असा अनुभव आहे.

चिकाटी व जिद्द :- संशोधन ही सर्जनशील प्रक्रिया असल्यामुळे नवीन कल्पना केव्हा सुचेल याचे वेळापत्रक नसते. तरी चिकाटी व नेटाने प्रयत्न चालू ठेवणे आवश्यक ठरते. त्याचप्रमाणे यशस्वी होणारच या जिद्दीने काम चालू ठेवण्याची मानसिक तयारी करावी. कारण सुरवातीस अनेक वेळा शोधलेख किंवा निबंध अस्वीकृत होतात. तसे का झाले याची चर्चा व कारणमीमांसा करा. पुढचे लेख तयार करताना त्यानुसार काळजी घ्या. लेख अस्वीकृत होण्याची कारणे अनेक प्रकारची असतात. अगदी ख्यातनाम गणित संशोधकांचे लेख ही अस्वीकृत होतात याची दखल घ्यावी. जर्नलची निवड लेखाच्या दर्जाची असावी व त्यासाठी अनुभवी गणितीचा सल्ला घ्यावा.

भाषा प्रभुत्व :- गणिती प्रश्न सोडवण्याइतकेच त्याची मांडणी तर्कसंगतपणे आणि प्रभावीपणे मांडणे महत्त्वाचे असते. गणिती संशोधन सादर करण्याची पद्धती बरीच वेगळी असते. अचूकता, कमी शब्दांचा वापर व स्पष्टपणा अशा प्रकारे शोधलेख लिहिणे अपेक्षित असते. म्हणूनच त्याप्रकारचे वाचन आणि लेखनाचा सराव करावा. लेख तज्ज्ञाकडून तपासून घ्यावेत.

ध्येय एकाग्रता :- उत्तम दर्जाचे संशोधन संपूर्ण एकाग्रतेशिवाय सहसा शक्य होत नाही. तरी संशोधन हे ध्येय ठरवले असल्यास स्पर्धा-परिक्षा किंवा तत्सम उपक्रम टाळावेत, कारण त्यासाठीचा अभ्यास वेगळ्या प्रकारचा असतो व संशोधनाला बहुधा पूरक असा नसतो. संशोधन मार्गापासून विचलित करणाऱ्या अशा बाबींना टाळा.

आव्हाने

प्रत्येक गणिती अगदी अव्वल प्रतिचे संशोधन आणि ते ही सातत्याने करणे हे फारच कमी वेळा घडते. नवीन संकल्पना आणि पथ-प्रदर्शक असे गणितातील संशोधन हे बहुधा २५ ते ४५ वयोगटातील संशोधकांकडून घडते असे आढळले आहे. तरी शक्य तितक्या लवकर पीएच.डी. ही संशोधन पदवी प्राप्त करण्यावर भर द्यावा. म्हणजेच संशोधनाची चांगली बैठक तयार करणारे संशोधन करण्यावर सुरवातीस भर द्यावा आणि न की एकदम गणिती-जग बदलून टाकणारे संशोधन

निष्कर्ष काढण्याची वाट बघत वेळ घालवावा. त्या पदवी प्राप्तीनंतर नवीन व परिपूर्ण असे संशोधन करण्यास त्यामुळे अधिक काळ उपलब्ध असेल.

सुसज्ज आधुनिक संशोधन ग्रंथालये तसेच प्रगत संगणक सुविधा पुरवणे हे विद्यापीठे व संशोधन केन्द्राच्या व्यवस्थापनाला एक आव्हान आहे. त्यांच्याकडे विनाठायी खर्च असे न बघता, ती भविष्यासाठीची गुंतवणूक आहे असा दृष्टिकोन असावा. तसेच गणिती संशोधनाला लागणारी मुक्तता व स्वतंत्रता अबाधित राहील याची काळजी घेणे आवश्यक असते. गणितविज्ञानाच्या परिषदा भरवण्यास सहाय्य करणे व संशोधकांना अशा परिषदेत भाग घेण्यास सुविधा देणे हेदेखील महत्त्वाचे असते.

हवे सतत संशोधन

गणितज्ञांनी संशोधनाची एक परंपरा स्थापन करणे आवश्यक असते. एखाद्या संस्थेत त्यामुळे काही निवडक विषयावर सतत संशोधन होत राहील हे बघितले पाहिजे. एकाच विषयाला वाहिलेल्या गणितींचा गट प्रभावीपणे चर्चा करणे, तसेच स्पर्धेमुळे उत्तमोत्तम संशोधन कृती निर्माण करतो असे आढळते. जेष्ठ संशोधकांनी आणि मार्गदर्शकांनी गणितातील नवीन विषय, पद्धती व संशोधन कल यांचा सातत्याने मागोवा घेऊन नव्या संशोधकांना भविष्यात उपयुक्त ठरू शकणाऱ्या विषयांत संशोधन करण्यास देखील प्रोत्साहन देणे फार महत्त्वाचे आहे. संशोधक विद्यार्थ्यांत दुजाभाव करणे, आर्थिक इतर गोष्टींची त्यांच्यापासून मागणी करणे व नगण्य योगदान असून ही प्रत्येक शोधलेखात आपले नाव घालण्यास त्यांना भाग पाडणे असे प्रकार संशोधन मार्गदर्शकांनी टाळले पाहिजेत.

उपयोजन–प्रेरित मूलभूत संशोधन (आकृती १ मधील चौरस २) हे भारतासारख्या विकसनशील देशाला आदर्शवत असे आहे. तरी प्रत्येक क्षेत्रातील कळीच्या समस्यांचा आढावा घेऊन त्यातील अग्रक्रमाने गणिती प्रतिकृती (मॉडेल्स) व ती सोडवण्यासाठीचे संशोधन पुरस्कृत करणे यावर अधिक भर दिला गेला पाहिजे. या संदर्भात भारत सरकारचे नियोजन आयोग असे उपक्रम राबवताना दिसते, पण राज्यपातळीवर याचा अभाव सर्वदूर आढळतो. त्याचप्रमाणे बहुशाखा संशोधन जवळ–जवळ नगण्य आहे. तरी विद्यापीठांनी त्यांच्या विविध विभागातील संशोधकांनी गणित व संलग्न विभागाशी संपर्क साधून गणिती, सांख्यिकी आणि संगणकीय तज्ञतेचा उपयोग करण्याची रूपरेषा आणि तत्वे तयार करून ती राबवणे. हे फार मोठे आव्हान

आहे, पण ते साध्य झाल्यास बहुतेक सर्व विषयातील संशोधनाला गणिती बैठक मिळून एक नवीन उंची गाठता येईल.

भारतीय गणितींचे योगदान वाखाणले जात असले, प्रज्ञा व प्रतिभा मान्य केली जात असली, तरी गणितात नोबेल पारितोषिकाच्या तोडीचे मानले जाणारे फील्डस पदक (मेडल) हे प्रदान करणे १९३६ पासून सुरू झाले पण आजपर्यंत एकाही भारतीय गणितीला ते मिळालेले नाही याची खंत आहे. तर सक्षम गणिती संशोधकांची पिढी निरंतरपणे उभी करत राहिल्यास तसे घडू शकते. हे एक राष्ट्रीय आव्हान मानून विशेष प्रयत्न केले गेले पाहिजेत. योग्य प्रकारे आखणी करून असा कार्यक्रम राबवल्यास असे यश मिळवणे अशक्य नाही.

गणिताचा ध्यास

गणितातील संशोधन हे अनेक प्रकारे व अनेक स्तरांवर करणे शक्य आहे. संशोधनासाठी विषयांची कमतरता तर नाहीच नाही. या संदर्भात तक्ता १ मध्ये अंकशास्त्रातील काही निवडक प्रश्न संशोधनासाठी दिले आहेत.

तक्ता १ : गणिती संशोधन आरंभासाठी निवडक प्रश्न

१. २२० चे पूर्णांकांचे भाजक १, २, ४, ५, १०, ११, २०, २२, ४४, ५५ व ११० असे आहेत (२२० वगळून). या सर्व भाजकांची बेरीज २८४ येते. तर २८४ चे वरील प्रमाणे पूर्णांक भाजक मांडून बेरीज केल्यास ती २२० येते. म्हणून २२० व २८४ या संख्यांना एकमेकांचे 'मित्र (एमिकेबल)' संख्या म्हणतात. अशा 'मित्र' संख्या निर्माण करण्यासाठी गणिती सूत्र किंवा पद्धत निर्माण करणे.

२. कुठलीही नैसर्गिक संख्या घेऊन तिच्या अंकांचा क्रम उलट करून नवी संख्या तयार करा. मूळ व नव्या संख्येची बेरीज करा. प्राप्त नव्या संख्येतील अंकांचा क्रम उलट करून त्या दोन संख्येची बेरीज करा. अशी प्रक्रिया वारंवार करत राहिल्यास डावीकडून किंवा उजवीकडून कशी ही वाचल्यास सारखीच असणारी संख्या प्राप्त होईल जिला 'पेलिनड्रोमिक' संख्या म्हणतात. उदा. मूळ संख्या १९ असल्यास वरील प्रक्रियेने १२१ ही पेलिनड्रोमिक संख्या

मिळते. असे का घडते ? किती वेळा अशी प्रक्रिया करणे आवश्यक आहे याचा अंदाज लावता येईल का ?

३. $\pi\sqrt{२}$ अपरिमेय आहे का ?

४. क्ष आणि ज्ञ अपरिमेय अंक असतील तर कुठल्या परिस्थितीत (क्ष + ज्ञ) अपरिमेय असेल ?

५. $क्ष^{२} = २\ ज्ञ^{४} - १$ याची क्ष = १, ज्ञ = १ आणि क्ष = २३९, ज्ञ = १३ अशी पूर्णांकातील उत्तरे आहेत जी संगणकाद्वारे शोधली आहेत. पण असे पूर्णांकि अचल गुणांक असलेल्या समीकरणाचे पूर्णांकांत उत्तर असेल किंवा नाही हे आधीच सांगण्यासाठी संगणक आज्ञावली (प्रोग्राम) तयार करणे शक्य आहे का ?

६. ४५ ला 'कापरेकर' संख्या म्हणतात कारण $४५^{२}$ = २०२५ आणि २० + २५ = ४५ असा संबंध डी. आर. कापरेकरांनी जोडला होता. अशा अधिक कापरेकर संख्या शोधा आणि त्या शोधण्यासाठी सूत्र निर्माण करता येईल का हे तपासा.

गणितातील संशोधन आयुष्यभर करता येण्यासारखे असून अनेक प्रश्न उत्तराच्या शोधात आहेत. काही प्रश्न सोडवले असले तरी त्यासाठी अधिक कार्यक्षम पद्धती विकसित करणे, पर्यायी सिद्धता देणे, त्यांचा इतर गणिती व अन्य विषयांच्या शाखांची संबंध जोडणे, उपयोजन करणे असे अनेक घटक गणित संशोधनाचा भाग होऊ शकतात.

असे म्हटले जाते की, ''तुम्हाला काय करायचे माहित नसल्यास, काही करू नका.'' मात्र गणित संशोधनाला पुढे न्यायचे असल्यास, ''तुम्हाला काय करायचे माहित नसल्यास, काही तरी करा'' असा त्यात बदल करणे आवश्यक आहे. भारतीय गणिताची परंपरा अधिक उंच नेण्यासाठी नियोजित पद्धतीने गणिती संशोधन होत राहावे असा प्रयत्न शिक्षणसंस्था व्यवस्थापन आणि शासकीय पातळीवरून होणे ही काळाची गरज आहे.

⌘⌘⌘

४५

गणिताची अखंड वाटचाल

गणित या विषयाची व्याप्ती अतिशय मोठी असून त्याचा विस्तार अखंडपणे चालू आहे हे विशेष. एक उल्लेखनीय बाब म्हणजे असा कुठलाही विषय किंवा क्षेत्र दिसत नाही ज्यात गणिताचा वापर झालेला नाही, अर्थातच काही वेळा तो अप्रत्यक्ष असू शकतो (उदा. संगणक प्रणालीमार्फत).

विकासाच्या वाटा

गणिताचा विकास साधारणपणे दोन मार्गांनी होताना आढळतो. एक म्हणजे उपयोजन डोळ्यासमोर ठेऊन, जसेकी एखादी व्यावहारिक समस्या सोडवण्यासाठी. तसे पाहिल्यास तत्वतः गणिताचा आरंभ विविध प्रकारच्या गोष्टींची प्रत्यक्षात मोजदाद व तुलना करण्यासाठी झाला. प्रशासकीय स्थिरता आल्यावर मोठे राजवाडे, किल्ले, मनोरे बांधण्यासाठी स्थापत्यकला व अभियांत्रिकी गणिताचा विकास पुढे झाला. नंतरच्या काळात बघितल्यास सांख्यिकी किंवा संख्याशास्त्र (स्टॅटिस्टिक्स) याची सुरुवात जुगारातील काही विवाद सोडविण्यासाठी झाली अशी नोंद आहे. त्याचप्रमाणे विमागणितशास्त्र (ॲक्चुअरिअल सायन्स) हे लांब पल्ल्याच्या व्यापारासाठी सागरी सफरी सुरू झाल्यावर त्यातून उद्‌भवणाऱ्या नुकसानीची जोखीम व तिचे परिणाम कमी करण्यासाठी विकसित झाले. दुसऱ्या महायुद्धात मर्यादित सैनिकी संसाधनांचा उपयोग विविध उद्दिष्ट्ये इष्टतमपणे गाठण्यासाठी कसा करावा या समस्येने प्रर्वतन संशोधन (ऑपरेशनल रिसर्च) या गणिताधारित शाखेचा उदय झाला हे एक ताजे उदाहरण आहे.

अमूर्त स्वरूपात विचार करून विविध संरचना तयार करणे हा गणिती विकासाचा दुसरा मार्ग आहे. त्याची सुरुवात पण प्राचीन काळात झाली याची दखल

घेतली पाहिजे. आदर्श कल्पना आणि संकल्पना मांडून व त्यांना एका शिस्तबद्ध चौकटीत आखून केलेली निर्मिती असा हा प्रकार आहे. अशी निर्मिती तर्कशास्त्र व इतर उपलब्ध गणिती संरचनांना छेद देणारी नसावी अशी दक्षता घेतली जाते. याचा अर्थ असा आहे की गणिती निष्कर्ष, सूत्रे व पद्धती कुठलेही उपयोजन डोळ्यासमोर न ठेवता स्वतंत्रपणे विकसित केली जातात. त्यांचा उपयोग लगेच किंवा दीर्घकाळानंतर होतो किंवा होऊ शकतो. उदाहरणार्थ, बी. रिमानने १८५० च्या दशकात रचलेली नवीन प्रकारची भूमिती ५० वर्षानंतर ए. आइनस्टाइनने त्याचा सापेक्षतावाद सिद्धांत (रिलेटीव्हीटी थेयरी) विकसित करण्यासाठी वापरली. साहजिकच अमूर्तपणे विकसित झालेल्या गणिताचा उपयोग होईल अशी खात्री देता येत नाही, व मुख्य म्हणजे त्याचा विकास करणारे गणितज्ञही त्याबाबत सहसा आग्रही नसतात. तथापि, सुयोग्य गणिती बैठक उपलब्ध नसल्यास अनेक विषयांच्या प्रगतीतील अडसर दूर करणे कठीण जाते असा अनुभव आहे. अमूर्त आणि उपयोजित गणित बहुधा एकमेकांना पूरक ठरत आलेले आहे.

जुन्या शाखांचा विकास

गणिताच्या नवीन शाखा आणि उपशाखा सातत्याने निर्माण होत आहेत. याचा निष्कर्ष असा काढू नये की गणिताच्या प्राथमिक शाखा, जशा की अंकशास्त्र (नंबर थेयरी), बीजगणित (अॅलजेब्रा) आणि गणनशास्त्र (कॅल्क्युलस) यांचा विकास खुंटलेला आहे. लक्षात घेण्यासारखी बाब म्हणजे अशा पारंपरिक शाखांतही भर पडत आहे. याचे उत्तम उदाहरण म्हणजे भूमितीचा विकास. युक्लिडने आजपासून दोन हजार वर्षापूर्वी भूमितीचा तर्कशुद्ध पाया रचला व ती भूमिती १९व्या शतकाच्या मध्यापर्यंत आदर्शवत आणि एकमेव प्रकारची निर्मिती आहे असे मानले जात होते. पण त्यानंतर अनंत प्रकारच्या तर्कशुद्ध भूमिती त्या मूळ भूमितीपासून थोडा फरक करून निर्माण करणे शक्य आहे हे सिद्ध करण्यात आले. त्यांना आता नॉन-युक्लिडीयन भूमिती असे म्हटले जाते व त्यांचा वापरही अनेक क्षेत्रात होतो. त्याचबरोबर प्रोजेक्टीव भूमिती आणि निर्देशांक (कोऑर्डिनेट) भूमितीचा विकास झाला, जो प्रत्यक्षात वापरणे महत्त्वाचे ठरले आहे. क्षेत्रविद्या (टोपोलॉजी) हे तिचे आणखीन एक रूप पुढे आलेले आहे.

भूमितीचा विकास त्यानंतर थांबला का या प्रश्नाचे उत्तर नाही असे आहे. १९६० च्या दशकात बी. मँडेलब्रॉट याने विकसित केलेली कंगोरी (फ्रॅक्शनल)

भूमिती ही एक उल्लेखनीय प्रगती आहे. तिच्या विकासात संमिश्र किंवा व्यामिश्र संख्या (कॉम्प्लेक्स नंबर्स) तसेच संगणकीय संस्काराच्या पद्धतींनी मोठा हातभार लावलेला आहे. प्रत्यक्षात या भूमितीचा वापर लोभस प्रतिमान, संरचना (डिझाईन्स), आकृतीबंध तयार करण्यासाठी तसेच चलचित्रे निर्मितीमध्ये मोठ्या प्रमाणावर केला जातो. पारंपारिक आणि आधुनिक गणिती संकल्पना व साधनांचा मिलाफ भूमितीला पुढे घेऊन जात आहे असे लक्षात येते.

भूमितीच्या वाटचालीची कथा संपलेली नाही. १९८० च्या दशकात एम. लेटन या गणितज्ञाने युक्लिडच्या भूमितीच्या पायापासून फारकत घेऊन नैसर्गिक व मानव-निर्मित आकारांच्या अभ्यासासाठी एक वेगळीच भूमिती निर्माण केली आहे. सदर भूमितीत आकृत्यांमधील समरूपता तपासण्याचे आगळे-वेगळे नियम प्रतिपादित केले आहेत, तसेच वक्ररेषांचे गणित मांडण्याची नवीन तत्वे आणि पद्धती मांडल्या आहेत. या भूमितीचा वापर करून लेटनने सुप्रसिद्ध चित्रकारांच्या अनेक विख्यात चित्रांचे प्रभावी विश्लेषण सादर केले आहे जे एक अभिनव दृष्टिकोन पुढे आणते. चित्रांची संरचना आणि त्यातील भाव व भावना पूर्णपणे जाणून घेण्यास ही भूमिती सक्षमपणे मदत करते असा त्याचा दावा आहे. या भूमितीचा वापर चाळीसहून अधिक विज्ञानशाखांत झाला आहे. या संदर्भात बरेच साहित्यही उपलब्ध आहे. लेटन यांची 'सिमेट्री, कॉजलिटी, माइन्ड' (१९९२) आणि 'अ जनरेटीव्ह थेयरी ऑफ शेप' (२००१) ही दोन पुस्तके त्यांच्या भूमितीबाबत विस्ताराने माहिती देतात.

आव्हान

वर चर्चा केलेले भूमितीचे उदाहरण एकूणच गणितात अनेक प्रकारे वेळोवेळी भर घालणाऱ्या कामाची कल्पना देते. मानवी समस्या विविध प्रकारे वाढत आहेत व त्यांचे समाधान शोधणे हे मानवी बुद्धीला आव्हान ठरत राहणार आहे. अशा सर्व प्रयत्नात गणितविज्ञान हे कळीची भूमिका निभावत आलेले आहे, पुढेही तसेच सहाय्य ते करेल अशी रास्त अपेक्षा आहे. गणितविज्ञानात रस असणाऱ्या व्यक्तींना म्हणूनच संशोधनासाठी विषयांची कमतरता कधी भासणार नाही, तसेच या विषयातील तज्ञता विविध क्षेत्रात वापरण्याच्या भरपूर संधी सहसा उपलब्ध असतील. सक्षम गणितज्ञ समाजासाठी उत्कृष्ट योगदान करत राहतील हे मानणे त्यामुळे अवास्तव वाटत नाही. गणिताचे अध्ययन, अध्यापन व संशोधन मानवी प्रगतीसाठी नेहमीच उपयुक्त ठरत आलेले आहे व तसेच ते भविष्यात देखील राहील.

आतापर्यंतच्या वाटचालीवरून गणिताची बहुरुपे, वैशिष्ट्ये तसेच उपयोजन, संशोधन आणि रोजगाराच्या संधी याबाबत बरीच माहिती वाचकांना मिळाली असेल अशी आशा आहे. मात्र गणिताचा संपूर्ण आवाका गवसणे अशक्यप्राय आहे हे लक्षात येते.

तरी गणिताची विविधता, भव्यता व उपयुक्तता लक्षात घेऊन त्याचा अभ्यास व प्रसार तसेच मानवाच्या विकासाला पुढे नेणाऱ्या गणिताच्या क्षमतेत वाढ करण्यास आपण शक्यतो योगदान करू असा निश्चय या पुस्तकाचा समारोप करताना करणे खचितच योग्य ठरेल.

⌘⌘⌘

निवडक संदर्भ सूची

१. आपटे, एम., *प्राचीन भारतीय गणित, भाग १,* पुणे : राजहंस प्रकाशन, २०१२.
२. टिकेकर, व्ही. जी., *गणित मोती,* नाशिक : गणित अध्ययन अध्यापन विकसन संस्था, २००४.
३. नारळीकर, जे., *गणिताच्या गमती-जमती,* मुंबई : मनोविकास प्रकाशन, २००८.
४. पाटकर, व्ही., *गणिताची अपूर्वाई,* मुंबई, २००८.
५. बापट, आर., *ऐसे प्रमेये रसिके,* पुणे : राजहंस प्रकाशन, २००४.

---

1. Adam, C., *Essential Mathematics and Statistics for Forensic Science,* Chichester, West Sussex: Wiley-Blackwell, 2010.
2. Bellos, A., *Alex's Adventures in Numberland – Dispatches from Wonderful World of Mathematics,* London: Blumsburry Publishing, 2010.
3. Blastland, M. and Dilnot, A., *The Tiger That Isn't – Seeing through a World of Numbers,* London: Profile Books Ltd., 2008.
4. Boob-Bevenbeck, B. and Hoyrup, J., *Mathematics and War,* Basal: Birkhauser-Verlag, 2003.
5. Bradley, I. and Meek, R. L., *Matrices and Society,* Princeton: Princeton University Press, 1986.
6. Cohen, I. B., *The Triumph of Numbers – How Counting Shaped Modern Life,* New York: W.W. Norton & Co., 2005.
7. Delvin, K., *All the Math that's Fit to Print (Articles from the Manchester Guardian),* Washington, D.C.: The American Mathematical Association, 1994.
8. Everitt, B., *Chance Rules – An Informed Guide to Probability, Risk and Statistics,* New York: Springer, 2008 (2nd edition).
9. Hilton, P., Holton, D. and Prederson, J., *Mathematical Vistas – From a Room with Many Windows,* New York: Springer, 2002.
10. Hoffman, P., *Archimedes' Revenge – The Joys and Perils of Mathematics,* London: Penguin Books, 1998.
11. Honsberger, R., *Mathematical Gems II,* Washington, D.C.: The American Mathematical Association, 1976.
12. Kac, M. and Ulam, S., *Mathematics and Logic – Retrospect and Prospects,* New York: Penguin Books, 1968.

13. Kaufmann, A. and Faure, R., *Introduction to Operations Research,* New York: Academic Press, 1968. (Translated from French by H. C. Sneyd)
14. Krantz, S.G., *Techniques of Problem Solving,* Hyderabad: Universities Press, 1998.
15. Leyton, M., *The Structure of Paintings,* Ney York: Springer Wein, 2006.
16. Livio, M., *Is God a Mathematician?* New York: Simon & Schuster, 2009.
17. Odifreddi, P., *The Mathematical Century – The 30 Greatest Problems of the Last 100 Years,* Princeton: Princeton University Press, 2000.
18. Paulos, J.A., *Innumeracy – Mathematical Illiteracy and its Consequences,* London: Penguin Books, 1988.
19. Pedoe, G., *The Gentle Art of Mathematics,* Hammondsmith, Middlesex: Penguin Books, 1958.
20. Perelman, Y. I., *Fun with Maths and Physics,* Moscow: Mir Publishers, 1984.
21. Pickover, C. A.,*The Math Book,* New York: Sterling Publishing Co., 2009.
22. Poundstone, W., *Labyrinths of Reason – Paradox, Puzzles and Reality of Knowledge,* New York: Doubleday, 1988.
23. Ronan, M., *Symmetry and the Monster – One of the Greatest Quests of Mathematics,* Oxford: Oxford University Press, 2006.
24. Roth, A. E. (ed.). *The Shapley Value, Essays in Honor of Lloyd S. Shapley,* Cambridge: Cambridge University Press, , 1988.
25. Saaty, T. L., *The Analytic Hierarchy Process,* New York: McGraw Hill, Inc., 1980.
26. Sautoy, M. du, *The Number Mysteries – A Mathematical Odyssey through Every Day Life,* London: Fourth Estate, 2010.
27. Shapley, L. S., “A Value for n-person Games”. in H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games, Volume II,* Princeton: Princeton University Press, 1953, pp. 307–317.
28. Tasic, V., *Mathematics and the Roots of Postmodern Thought,* Oxford: Oxford University Press, 2001.
29. Wapner, L M., *The Pea and the Sun – A Mathematical Paradox.* Wellesley, Massachusetts: A. K. Peters, Ltd., 2005.
30. Wilson, R. J., *Stamping through Mathematics,* New York: Springer-Verlag, 2001.

⌘⌘⌘

व्यक्तीनाम सूची

(*) निवडक संदर्भ सूचीतील इंग्रजी संदर्भाचे लेखक.

⌘⌘⌘

विषयसूची

⌘⌘⌘

लेखकाची पुस्तके

सहलेखक :–

- Telephone Usage and Behaviour : Learning from Bombay's Experience (1985)
- Human Orientation - Science and Art (1993)
- Elementary Mathematics for Economists (1996)
- Selected Writings on Transport (1997)
- मानवाभिमुखतेचे शास्त्र (२००४)

लेखक :–

- संशोधन–मार्गावरील प्रवास (२००७)
- गणिताची अपूर्वाई (२००८)
- बहुरंगी गणित (२०१३)

सहसंपादक :–

- मराठीतील विज्ञानविषयक लेखन : १८३०–१९५०, खंड १ व २ (२०११)

संपादक :–

- Reflections of a Librarian - Selected Writings of Professor A. C. Tikekar (2011)

लेखकाचे शोधलेख आणि इतर साहित्यासाठी संपर्क :

डॉ. विवेक पाटकर
डी–१, अनिता को–ऑप. सोसायटी,
प्लॉट ६१२, सेक्टर ६, चारकोप,
कांदिवली (पश्चिम), मुंबई ४०० ०६७.
इ–मेल : vnpatkar2004@yahoo.co.in

बहुरंगी गणित

गणितातील भारताची गौरवशाली परंपरा वाढवणारे असामान्य गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन (२२ डिसेंबर १८८७ ते २६ एप्रिल १९२०) यांच्या १२५व्या जन्मवर्षानिमित्त २०१२ हे साल भारतात राष्ट्रीय गणितवर्ष म्हणून साजरे केले गेले. त्या निमित्ताने गणिताची भव्यता, व्यापकता आणि उपयोगिता जनसामान्यांना समजेल अशा भाषेत रंजकपणे मांडण्याचा प्रयत्न लेखकाने त्याच्या विविध लेखांतून केला. त्या सर्व लेखांना गुंफून गणिताचे बहारदार चित्र या पुस्तकात साकारले आहे.

पराकोटीच्या अमूर्ततेपासून ते दैनिक व्यवहारात उपयोगी पडणाऱ्या गणित या विषयाबद्दल एक कुतूहल सर्वसामान्यपणे आढळते. या संदर्भात इथे सादर केलेले गणिताचे विविध पैलू त्याच्या अनेकविध रंगीत छटा पुढे आणतात. कमी ज्ञात असलेली तसेच नावीन्यपूर्ण दालनांतून दिसणारी व गहिरे अंतरंग प्रकट करणारी गणिताची ही रूपे निश्चितच मोहित करणारी आहेत.

'गणिताची अपूर्वाई' (२००८) या गाजलेल्या पुस्तकाच्या लेखकाचे हे पुस्तक देखील विद्यार्थी, शिक्षक, संशोधक व गणितात रस असलेल्या सर्वांना भावेल असे आहे.

संपर्क :
डॉ. विवेक पाटकर
डी-१, अनिता को-ऑप. सोसायटी,
प्लॉट ६१२, सेक्टर ६, चारकोप,
कांदिवली (पश्चिम), मुंबई ४०० ०६७.
इ-मेल : vnpatkar2004@yahoo.co.in